

40

Lith.

90

m

4th Lith. 90 m

Preisschrift
genaue Messung der Winkel
an
Krystallen.

Preisschrift
über
genaue Messung der Winkel an Krystallen.

~~~~~

Verlag von  
der physikalischen Anstalt der Universität zu Berlin  
Herausgegeben von J. Müller (1871)

Verlag von  
der physikalischen Anstalt der Universität zu Berlin  
Herausgegeben von J. Müller (1871)

Verlag von  
der physikalischen Anstalt der Universität zu Berlin  
Herausgegeben von J. Müller (1871)

\*



# Preischrift

über

genaue Messung der Winkel an Kristallen.



2

**Preisschrift**  
über  
**genaue Messung der Winkel**  
an  
**Krystallen.**

---

Von  
**D<sup>r</sup>. ADOLPH THEODOR KUPFFER.**

---

G e k r ö n t  
von der physikalischen Klasse der Königlich Preussischen Akademie der  
Wissenschaften am 3. Juli 1823.

---

**Berlin.**  
Gedruckt in der Druckerei der Königl. Akademie  
der Wissenschaften.

**1825.**

---

In Commission bei F. Dümmler.





Preisschrift  
über  
genaue Messung der Winkel  
an  
Kristallen.

Von  
Dr. Adolph Theodor Kupffer.

Gekrönt  
von der physikalischen Klasse der Königlich Preussischen Akademie der  
Wissenschaften am 3. Juli 1825.

Berlin.

Gedruckt in der Druckerei der Königl. Akademie  
der Wissenschaften.

1825.

Verlag von Carl F. Duncker.

Bayerische  
Staatsbibliothek  
München



## Vorrede.

Die physikalische Klasse der Königlichen Akademie der Wissenschaften hatte für das Jahr 1820 folgende Preisfrage aufgestellt, und für das Jahr 1822 erneuert. Das Programm lautete:

„Zur schärferen Bestimmung der Winkel an den Krystallen  
„hat man neuerlich durch die Bemühungen der Herren Malus,  
„Wollaston und Anderer, mehrere sehr schätzbare Beiträge erhalten. Es ist indeß zu wünschen, daß diese Bestimmungen noch  
„weiter fortgesetzt und nicht bloß auf einige einzelne Angaben beschränkt, sondern mit größerer Vollständigkeit auf alle Theile  
„und Glieder eines Krystallisationssystemes ausgedehnt werden.  
„Vorzüglich wünschenswerth ist dies in Bezug auf die Kenntniß  
„gewisser Hauptgattungen von Fossilien, welche entweder durch  
„die Wichtigkeit ihrer Stelle unter den unorganischen Erdbildungen überhaupt, oder durch vorzüglichen Reichthum der Gestaltungs-Erscheinungen, die sie darbieten, vor andern ein größeres  
„Interesse einflößen. Man darf hoffen, daß eine recht vollständige und sorgfältige Messung aller Theile solcher Systeme im  
„Zusammenhange nicht allein die krystallinischen Gesetze ihrer Bildung näher kennen lehren, sondern daß sie auch auf die Spur  
„des Conflictes leiten werde, in welchem die, die krystallinische  
„Gestalt hervorbringenden Kräfte mit andern, zum Theil ihnen



„entgegengesetzten Kräften der Masse zu stehen scheinen, ja wohl  
„stehen müssen.“

„Eine Vergleichung des Grundgesetzes der Gestaltung einer  
„Fossiliengattung mit dem einer andern setzt gleichfalls eine schon  
„weiter fortgeschrittene Reihe ähnlicher Arbeiten voraus.“

„Die physikalische Klasse der Königlichen Akademie der  
„Wissenschaften setzt daher für das Jahr 1820 folgende Preis-  
„aufgabe.“

„*Genaue Messung der Winkel an einem oder mehreren*  
„*Krystallisationssystemen, mit Hülfe irgend eines der*  
„*neuerlich als Goniometer in Anwendung gekommenen*  
„*Instrumente, oder eines ähnlichen beliebig gewählten,*  
„*welches Genauigkeit der Messung bis auf Minuten ge-*  
„*stattet.*“

„Hierbei wird verlangt: Angabe des Instruments und seiner  
„Einrichtung, so wie der Mittel, deren man sich bedient hat, um  
„sich von der Genauigkeit desselben zu vergewissern; und dann  
„eine so viel möglich vollständige Durchmessung aller Theile des-  
„jenigen oder derjenigen Krystallisationssysteme, welche man zur  
„Untersuchung gewählt, mit Rücksicht auf die Theorie des Zu-  
„sammenhanges zwischen den verschiedenen Flächen eines und  
„desselben Systemes.“

„Empfohlen werden vorzugsweise die Systeme des Quarzes,  
„des Feldspathes, des Kalkspathes; dann des Schwerspathes, des  
„Topases, des Gypses; der Hornblende, des Augits u. s. f. Die re-  
„gulären oder tessularen Systeme bleiben von der Untersuchung  
„zwar nicht ausgeschlossen; doch dürfte sich der Preisbewerber  
„wenigstens nicht auf sie einschränken.“



„Gute Wahl der zu messenden Stücke (Krystalle von kleinerem Volumen sind bekanntlich zu diesen Messungen geeigneter, als von größerem Volumen) wird ganz besonders empfohlen; und die Klasse wird es gern sehen, wenn die zur Untersuchung gebrauchten Exemplare entweder von freien Stücken, oder auf ihr Verlangen (gegen Rücksendung) ihr zugeschickt werden können; worüber, so wie über den Weg, durch welchen der Wunsch der Klasse ihm ohne Entsiegelung des Zeddels angezeigt werden kann, der Einsender sich zu erklären haben wird.“

Durch eine eingegangene werthvolle Concurränzschrift, welche bei grossem Verdienst die gegebene Aufgabe dennoch nicht vollständig löste, sah sich die Klasse veranlaßt, den Termin der Beantwortung unter Verdoppelung des Preises noch um ein Jahr zu verlängern, um dem Verfasser Gelegenheit zur Fortsetzung seiner schönen Arbeit zu geben und ihm Zeit zu lassen, ein in einem Nachtrage kurz angezeigtes Resultat über ein von ihm aufgefundenes Gesetz des Zusammenhanges zwischen Krystallisation, specifischem Gewicht und chemischem Aequivalent weiter zu begründen und genügender zu entwickeln.

Die Hoffnung, den Verfasser zum zweitenmal concurriren, und ansehnliche Erweiterungen seiner ersten Abhandlung einsenden zu sehen, täuschte nicht. Ob nun gleich die Ausdehnung der Arbeit sich noch nicht dahin erstreckte, die sämtlichen bekannten Krystallflächen eines einzigen Krystallsystems, wie das vom Verfasser vorzugsweise gewählte des Quarzes, vollständig durchzumessen, so konnte doch die Klasse bei der scharfsinnigen und gründlichen Arbeit, welche die erste Abtheilung über die allgemeine Methode, aus den Beobachtungen zu einem



möglichst scharfen Resultat zu gelangen, enthält, bei dem so sehr ausdauernden Fleiß, mit welchem der Verfasser in der zweiten Abtheilung die Messungen angestellt hat, und bei den merkwürdigen Resultaten, zu welchen er auch schon durch sie gelangt ist, nicht in Zweifel darüber seyn, daß die Abhandlung der Zuerkennung des Preises vollkommen würdig sei; und sie wurde desselben einstimmig für würdig erklärt. Auf eine noch vollständigere Lösung der gegebenen Preisfrage konnte die Klasse um so weniger mit Billigkeit dringen, als dazu der Besitz mehrerer ausgesuchter Krystallabänderungen vorausgesetzt wird, welcher nicht vom Willen des Einsenders abhängt.

Der im Anhang vom Verfasser unternommene Versuch, eine Formel für die gegenseitige Bestimmung von Krystallform, specifischem Gewicht, und chemischem relativem Gewicht aufzustellen, verdient außerdem eine sehr rühmliche Erwähnung, wenn gleich er noch zu viel Unerwiesenes in den Voraussetzungen und Willkührliches in der Anwendung enthält, um für die wirkliche vollendete Entdeckung eines so überaus wichtigen Gesetzes angesehen werden zu können.

Bei der Eröffnung des Zeddels fand sich als Verfasser der Preisschrift, Herr D. Ad. Th. Kupffer, damals in Mitau, gegenwärtig Professor der Chemie und Physik zu Kasan.

Berlin, im December 1825.



Ueber  
Messung von Krystallwinkeln.

Die Aufgabe, den Winkel, den je zwei Flächen eines Krystalls mit einander machen, aufs Genaueste zu bestimmen, kann nur durch Vervielfältigung der Beobachtungen und geschickte Combination derselben gelöst werden. Vervielfältigung der Beobachtungen wird durch Meßinstrumente mit Repetitionskreisen leicht bewirkt, eine gute Combination derselben durch die Abhängigkeit der Krystallwinkel untereinander möglich gemacht. Der Zweck dieser Bemühungen muß die Verbesserung und Compensation der Fehler seyn, die aus der Unvollkommenheit unserer Instrumente und unserer Sinne fließen. Eine genaue Darstellung dieser Fehler wird schicklich die erste Abtheilung dieser Schrift bilden, um, so vorbereitet, die Beobachtungen, die in der zweiten Abtheilung enthalten sind, würdigen und mit Sicherheit benutzen zu können. Die ersten unsicheren Züge einer Theorie der Krystallbildung habe ich in einen Anhang verwiesen, um zu erkennen zu geben, wie sehr ich noch selbst von der Schwachheit dieses Versuchs überzeugt bin.



## Erste Abtheilung.

Von den Fehlern, die bei der Messung von Krystallwinkeln zu besorgen sind, und den Methoden, sie soviel als möglich zu entfernen.

I. Von den Fehlern, die aus der Unvollkommenheit unserer Sinne und andern unbestimmbaren Ursachen fließen.

1. Man kennt die Gesetze nicht, denen die Fehler unserer Sinne unterworfen sind. Nur soviel ist gewiss, daß einige positiv andere negativ, einige groß andere klein ausfallen werden.

Es läßt sich deshalb erwarten, daß, wenn man mehrere Beobachtungen zusammennimmt, das Resultat der Combination richtiger seyn wird, als die meisten der einzelnen Beobachtungen.

Die größten Mathematiker unserer Zeit haben sich mit diesem Gegenstand beschäftigt, der besonders für Astronomie von so großer Wichtigkeit ist. Nachdem Gauß und Legendre beinahe gleichzeitig die vortheilhafteste Combinationsmethode erfunden hatten, gab Laplace in seiner *Théorie des Probabilités* mit der ihm eignen Geschicklichkeit eine Analyse dieser und anderer Methoden, die früher im Gebrauch waren, und bestimmte durch eine auf die Theorie der Wahrscheinlichkeit gegründete Rechnung den Werth derselben gegeneinander.

Ich benutze diese Arbeiten, um dem Leser eine klare und gewisse Einsicht in die Combinationsmethoden zu verschaffen, die man zur Erreichung unseres Zwecks anwenden kann.

Man kann einen Krystallwinkel entweder durch unmittelbare Beobachtung finden, oder ihn aus einem andern Winkel, der



in einem bekannten Zusammenhang mit jenem steht, und den man bereits beobachtet hat, berechnen.

Will man  $s$  Beobachtungen eines Winkels  $z$  machen, alle mit demselben Instrument und auf dieselbe Art, so läßt sich im Allgemeinen annehmen, daß die Leichtigkeit, einen negativen Fehler zu begehen, eben so groß seyn wird, als die einen positiven Fehler zu machen, und daß beide Arten von Fehlern eine gewisse Größe  $a$  nicht übersteigen werden. Es läßt sich also erwarten, daß wenn man alle diese Beobachtungen zusammen addirt, und durch  $s$ , die Zahl derselben, dividirt, das Resultat desto weniger von der Wahrheit abweichen wird, je größer  $s$  ist, weil die Voraussetzung, daß der negativen Fehler eben so viele und eben so große vorkommen werden, als der positiven, bei einer großen Anzahl von Beobachtungen gewiß weniger Ausnahmen erleidet als bei einer geringen. Wirklich beweist auch Laplace durch eine feine analytische Rechnung, daß die Probabilität eines Fehlers  $u$  im Resultat sei

$$\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{ks}{k''\pi}} \cdot \int du \, e^{-\frac{k u^2 s}{4 k'' a^2}}$$

Hier ist  $k = 2 \int dx \, \phi(x)$  und  $k'' = \int x^2 dx \, \phi(x)$ ;  $\phi(x)$  ist eine Function von  $x$ , welche die Probabilität eines Fehlers  $x$ , positiv oder negativ, ausdrückt;  $c$  ist die Zahl, deren natürlicher Logarithmus gleich 1 ist;  $\pi$  ist das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zu seinem Diameter.

Zugleich ist der mittlere Fehler, der im Resultat zu fürchten ist <sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Das Integral aus der obigen Größe mit  $u$  multiplicirt und von  $u = 0$  bis  $u = \infty$  genommen.



$$\mp a \sqrt{\frac{k'}{k\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}}$$

also desto kleiner, je gröfser  $s$ .

Man sieht hieraus den grofsen Vortheil, den Instrumente mit Repetitionskreisen gewähren, mit welchen man leicht denselben Winkel, so oft man will, messen kann. Es sei nun ein Winkel  $n$  mal mit einem Repetitionskreise gemessen, die Anzahl der Repetitionen, die man bei jeder Messung gemacht hat, sei  $s_1, s_2, s_3, s_4$  etc.; die Werthe des Winkels, die die Messungen nach einander gegeben haben, seien  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ . Setzt man nun  $a \sqrt{\frac{k'}{k\pi}} = b$ , so wird nach dem Obigen der zu erwartende mittlere Fehler des Winkels  $\alpha_n$  gleich  $\mp \frac{b}{\sqrt{s_n}}$  seyn, und so bei allen übrigen Winkeln.

Man kann jetzt folgende Tafel entwerfen, in welcher  $y$  den wahren Winkel, der gesucht wird, bedeutet,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mp \frac{b}{\sqrt{s_1}} &= y \\ \alpha_2 \mp \frac{b}{\sqrt{s_2}} &= y \\ \alpha_3 \mp \frac{b}{\sqrt{s_3}} &= y \quad (1) \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_n \mp \frac{b}{\sqrt{s_n}} &= y \end{aligned}$$

In dieser Tafel sind die mittleren Fehler unbekannt, da  $b$  unbekannt ist; es gilt also, die verschiedenen Werthe von  $y$  so zu combiniren, dafs die Summe der mittleren Fehler gleich Null, oder auch nur so klein als möglich wird.

Der natürlichste Gedanke ist, jede Gleichung so umzuändern, dafs die mittleren Fehler alle einander gleich werden. Da wir angenommen haben, dafs es eben so leicht ist, negative Fehler zu



machen, als positive, so ist zu vermuthen, daß alsdann alle Fehler sich aufheben werden. Dies ist in folgender Tafel geschehen

$$\begin{aligned} \sqrt{s_1} \cdot a_1 \mp b &= \sqrt{s_1} \cdot y \\ \sqrt{s_2} \cdot a_2 \mp b &= \sqrt{s_2} \cdot y \\ \sqrt{s_3} \cdot a_3 \mp b &= \sqrt{s_3} \cdot y \\ &\vdots \\ \sqrt{s_n} \cdot a_n \mp b &= \sqrt{s_n} \cdot y \end{aligned} \quad (2)$$

aus welcher, wenn man annimmt, daß die positiven und negativen Fehler einander grade aufheben, man findet

$$y = \frac{\sqrt{s_1} \cdot a_1 + \sqrt{s_2} \cdot a_2 + \sqrt{s_3} \cdot a_3 + \dots + \sqrt{s_n} \cdot a_n}{\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3} + \dots + \sqrt{s_n}}$$

welches wir in Zukunft so bezeichnen wollen

$$y = \frac{S \cdot \sqrt{s_n} \cdot a_n}{S \cdot \sqrt{s_n}}$$

2. Nehmen wir es noch genauer, so läßt sich nicht erwarten, daß sich im Resultat der einzelnen Messungen immer grade der mittlere Fehler einstellen wird. Setzen wir also  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n$  für  $b$ , wo  $\varepsilon$  sowohl positiv als negativ seyn kann, und machen  $\sqrt{s_1} = p_1, \sqrt{s_2} = p_2, \sqrt{s_3} = p_3$  und so fort, so gewinnt die Tafel (2) folgende Gestalt

$$\begin{aligned} p_1 \cdot a_1 + \varepsilon_1 &= p_1 \cdot y \\ p_2 \cdot a_2 + \varepsilon_2 &= p_2 \cdot y \\ p_3 \cdot a_3 + \varepsilon_3 &= p_3 \cdot y \\ &\vdots \\ p_n \cdot a_n + \varepsilon_n &= p_n \cdot y \end{aligned} \quad (3)$$

Nun weiß man nicht mehr, ob die Summe der Fehler  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n$  eine hinlänglich kleine GröÙe seyn



$$m_1 \varepsilon_1 + m_2 \varepsilon_2 + m_3 \varepsilon_3 + \dots + m_n \varepsilon_n$$

Die Tafel (3) verwandelt sich nun in folgende:

[illegible]

$$\gamma = \frac{m_1 p_1 \alpha_1 + m_2 p_2 \alpha_2 + m_3 p_3 \alpha_3 + \dots + m_n p_n \alpha_n}{m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 + \dots + m_n p_n}$$

$$= \frac{S \cdot m_n \cdot p_n \cdot \alpha_n}{S \cdot m_n \cdot p_n}$$
$$\frac{S \cdot m_n \cdot p_n}{2 a \sqrt{k'' \pi} \cdot S \cdot m^2} \cdot \int du \, c - \frac{k}{4 k''} \cdot \frac{u^2 (S \cdot m_n \cdot p_n)^2}{a^2 \cdot S \cdot m_n}$$

und der zu fürchtende mittlere Fehler

$$\mp a \sqrt{\frac{k''}{k \pi}} \frac{\sqrt{S \cdot m_n^2}}{S \cdot m_n \cdot p_n}$$

Man findet leicht durch Differentiation, daß dieser Ausdruck des mittleren Fehlers zu einem Minimum wird, wenn



$m_1 = \mu p_1, m_2 = \mu p_2, m_3 = \mu p_3$  und so fort, wo  $\mu$  eine constante Gröfse ist.

Der der Wahrheit am nächsten kommende Werth von  $\gamma$  ist also

$$\gamma = \frac{S \cdot p_n^2 \cdot \alpha_n}{S p_n^2} = \frac{S \cdot s_n \cdot \alpha_n}{S \cdot s_n}$$

Die Probabilität eines Fehlers  $u$  in diesem Resultat ist

$$\frac{\sqrt{S \cdot p_n^2}}{2 a \sqrt{\frac{k'' \pi}{k}}} \cdot \int du \, e^{-\frac{k u^2}{4 k'' a^2}} \cdot S p_n^2$$

und der in demselben zu fürchtende mittlere Fehler

$$\mp a \sqrt{\frac{k''}{k \pi}} \frac{1}{\sqrt{S p_n^2}}$$

Diese Methode ist auch da anwendbar, wo man den Winkel nicht unmittelbar gemessen hat, sondern andere Winkel, die in einem bekannten Zusammenhang mit dem ersten stehen. Wir wollen erst ganz allgemein annehmen, die beobachteten Gröfsen  $A_1, A_2, A_3$  etc. seien lineäre Functionen von der gesuchten Gröfse  $z$ , so dafs

$$\begin{aligned} p_1 z + a_1 - A_1 &= \varepsilon_1 \\ p_2 z + a_2 - A_2 &= \varepsilon_2 \\ p_3 z + a_3 - A_3 &= \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (5)$$

$$p_n z + a_n - A_n = \varepsilon_n$$

wo  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  bekannte constante Gröfsen sind. Multiplirt man jede dieser Gleichungen mit sich selbst, um die Quadrate der Fehler zu bekommen, und setzt das Differential der Summe dieser Quadrate gleich Null, um den Werth von  $z$  zu



finden, der die Summe der Quadrate der Fehler zu einem Minimum macht, so bekommt man die Gleichung

$$z = \frac{S p_n A_n - S p_n \cdot a_n}{S p_n^2}$$

welche *mutatis mutandis* mit der obigen identisch ist. Man hat diese Methode, deren Erfinder Gauß und Legendre sind, die Methode der kleinsten Quadrate oder die vortheilhafteste Methode genannt.

3. Wir wollen uns jetzt mit der Aufgabe näher bekannt machen, aus den beobachteten Gröſſen  $A_1, A_2, A_3$  etc., welche in einem bekannten Zusammenhang mit der gesuchten Gröſſe  $z$  stehen, den genauesten Werth dieser letzteren zu finden. Man hat sich schon vor langer Zeit der Methode bedient, daß man aus den beobachteten Gröſſen  $A_1, A_2, A_3$  etc. die correspondirenden Werthe von  $z$  berechne, und das arithmetische Mittel aus ihnen nahm. Man sieht aber leicht ein, daß ein in der Beobachtung von  $A_1$  begangener Fehler nicht von demselben Einfluß auf den berechneten Werth von  $z$  seyn kann, als ein in der Beobachtung von  $A_2$  gemachter Fehler und so fort bei den übrigen; die Voraussetzung einer gleichmäſſigen Vertheilung der Fehler in negativer und positiver Richtung, die allen Combinationsmethoden zum Grunde liegt, wird also verletzt. Man kann diesem auf folgende Art abhelfen. Die beobachteten Gröſſen seien alle solche Functionen der gesuchten Gröſſe  $z$ , daß

$$A_1 = \phi'(z)$$

$$A_2 = \phi''(z)$$

$$A_3 = \phi'''(z)$$

etc.



$z_1, z_2, z_3$  etc. seien die aus diesen Gleichungen berechneten Werthe von  $z$ . Die in den Beobachtungen vorgefallenen Fehler können wir als sehr kleine Aenderungen der Gröſsen  $A_1, A_2, A_3$  etc. ansehen, deren jede ihre bestimmte Aenderung in der Gröſſe  $z$  hervorbringt. Man wird nicht sehr irren, wenn man diese Aenderungen für Differentiale nimmt; wir können alsdann leicht berechnen, was für eine Aenderung ( $dz$ ) die Gröſſe  $z$  erfährt, wenn sich  $A_1$  um  $dA_1$ ,  $A_2$  um  $dA_2$ ,  $A_3$  um  $dA_3$  etc. ändert; je größer das Verhältniß dieser Aenderungen ( $\frac{dA}{dz}$ ) ist, desto kleiner wird der Fehler in dem berechneten Werthe von  $z$  seyn: wenn man also den Fehlern in den berechneten Werthen von  $z$  eine gleichmäßige Vertheilung geben will, so muß man diese Werthe erst mit deren Aenderungsverhältnissen (Differentialquotienten) multipliciren. Die Summe dieser Producte durch die Summe der Differentialverhältnisse dividirt, giebt

$$z = \frac{z_1 \frac{d\phi'_1 z}{dz} + z_2 \frac{d\phi''_2 z}{dz} + z_3 \frac{d\phi'''_3 z}{dz} + \text{etc.}}{\frac{d\phi'_1 z}{dz} + \frac{d\phi''_2 z}{dz} + \frac{d\phi'''_3 z}{dz} + \text{etc.}}$$

Dieser Werth von  $z$  wird eben so genau seyn, als derjenige, den man finden würde, wenn man eine gleiche Anzahl directer Beobachtungen dieser Gröſſe zusammenaddiren und die Summe durch ihre Anzahl dividiren würde.

Will man diese Methode auf die Tafel (5) anwenden, so hat man nichts weiter zu thun, als die Gleichungen alle zusammenzuaddiren, da  $\frac{dA_1}{dz} = p_1$ ,  $\frac{dA_2}{dz} = p_2$ ,  $\frac{dA_3}{dz} = p_3$  etc.; die erhaltene Endgleichung wird den gewünschten Werth von  $z$  geben.

Bei weitem mehr Rechnung erfordert die Anwendung dieser Methode auf unsern Gegenstand, da die Winkel durch trigonome-



trische Functionen untereinander zusammenhängen. Es sey z. B. beim Quarz  $A$  der Neigungswinkel zweier benachbarter Pyramidenflächen,  $A'$  der Neigungswinkel zweier abwechselnder Pyramidenflächen,  $I$  der doppelte Neigungswinkel einer Pyramidenfläche gegen die Axe,  $a$  der ebene Winkel an der Spitze gemessen, so ist

$$1) \cos \frac{1}{2} A = \cos \frac{1}{2} A$$

$$2) \cos \frac{1}{2} A' = \sqrt{3} \cdot \cos \frac{1}{2} A$$

$$3) \cos \frac{1}{2} I = 2 \cos \frac{1}{2} A$$

$$4) \cos \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \frac{1}{2} A}$$

Die drei ersten Gleichungen enthalten dieselbe Function von  $A$ ,  $A'$  und  $I$ ; man kann bei ihnen also sehr gut die Methode der kleinsten Quadrate anwenden; die vierte Gleichung aber entzieht sich derselben. Um also alle vier Beobachtungen zur Bestimmung von  $A$  anwenden zu können, setzen wir alle vier Werthe von  $A$ , die aus den vier Beobachtungen hervorgehen, an, und multipliciren sie mit den aus den Gleichungen berechneten Differentialverhältnissen

$$\frac{dA}{dA} = 1, \quad \frac{dA'}{dA} = \frac{\sqrt{3} \sin \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} A'}, \quad \frac{dI}{dA} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} I}, \quad \frac{da}{dA} = \frac{\sqrt{3} \cos \frac{1}{2} A}{2 \sin \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} A}$$

Dadurch erhält man eine gleichmäßige Vertheilung der Fehler, welche die Anwendung aller besseren Combinationismethoden voraussetzt.

Nun kann man auch von der Methode der kleinsten Quadrate Gebrauch machen, indem man jedes der obigen Producte noch einmal mit seinem Coefficienten multiplicirt, und die Summe aller dieser Producte durch die Summe der Quadrate der Coefficienten (der Differentialquotienten) dividirt. So erhält man, wenn man mit  $A_1, A_2, A_3, A_4$  die aus den vier Beobachtungen hervorgehenden Werthe von  $A$  bezeichnet:



$$A = \frac{A_1 + \left(\frac{dA'}{dA}\right)^2 A_2 + \left(\frac{dI}{dA}\right)^2 A_3 + \left(\frac{da}{dA}\right)^2 A_4}{1 + \left(\frac{dA'}{dA}\right)^2 + \left(\frac{dI}{dA}\right)^2 + \left(\frac{da}{dA}\right)^2}$$

Alle bisher dargestellten Methoden setzen voraus, daß alle Beobachtungen mit gleicher Sorgfalt gemacht seien. Es ist deshalb gut, die Rechnung zweimal vorzunehmen; erst mit allen Beobachtungen: aus dem nach dieser Rechnung gefundenen Werth des gesuchten Winkels berechnet man dann die übrigen beobachteten Winkel, und sieht, wie diese berechneten Werthe mit den beobachteten übereinstimmen; man verwirft alsdann die Beobachtungen, die gar zu sehr abweichen, und nimmt eine zweite Combination bloß mit den übrig gebliebenen guten Beobachtungen vor. Um sich diese doppelte Rechnung so leicht als möglich zu machen, kann man das erste Mal die Combinationmethode anwenden, die Laplace *méthode de situation* nennt. Sie besteht darin, daß man die aus den Beobachtungen berechneten Werthe von  $z$  (siehe Tafel 5) so aneinander reiht, daß sie vom Anfang der Reihe bis zum Ende abnehmen, und daß man denjenigen Werth als den richtigsten ansieht, der gleich weit vom Ende und vom Anfang entfernt ist. Man wählt nun diejenigen Werthe aus, die sich nicht gar zu weit von diesem mittleren entfernen, und combinirt sie nach der eben beschriebenen vortheilhaftesten Methode.

4. Laplace hat auch gefunden, wie man aus der Vergleichung des aus der Combination der Beobachtungen hervorgehenden Resultats mit den einzelnen Beobachtungen selbst das Vertrauen in Zahlen ausgedrückt finden kann, welches dieses Resultat verdient. Er beweist in seinem angeführten Werke, daß die wahrscheinlichste Summe der Quadrate der Fehler von  $n$  Beobachtungen

$$S \cdot \epsilon_n^2 = \frac{2k''}{k} \cdot a^2 n$$



sei. Man kann hieraus den unbekannten Factor im Ausdruck für die Probabilität eines Fehlers  $u$  im Resultat der vortheilhaftesten Methode bestimmen; man findet nämlich

$$a \sqrt{\frac{k''}{k\pi}} = \sqrt{\frac{S \varepsilon_n^2}{2 n \pi}}$$

Die Probabilität eines Fehlers  $u$  im Resultat der Methode der kleinsten Quadrate ist also gleich

$$\sqrt{\frac{n \cdot S p_n^2}{2 \pi \cdot S \cdot \varepsilon_n^2}} \cdot \int du c^{-\frac{n S p_n^2}{2 S \varepsilon_n^2} \cdot u^2}$$

und der zu erwartende mittlere Fehler gleich

$$\mp \sqrt{\frac{S \cdot \varepsilon_n^2}{2 n \pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S \cdot p_n^2}}$$

Nennen wir den Factor  $\frac{n S \cdot p_n^2}{2 S \varepsilon_n^2}$  das Gewicht des Fehlers <sup>(1)</sup> und bezeichnen ihn mit  $P$ , so ist die Probabilität, daß der Fehler des Resultats in den Grenzen  $\mp U$  enthalten seyn wird

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int du c^{-P u^2}$$

dieses Integral von  $u = -U$  bis  $u = +U$  genommen. Löst man diesen Ausdruck in eine Reihe auf, und integrirt von  $-U$  bis  $+U$ , so findet man folgende Reihe <sup>(2)</sup>

$$\frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{\pi}} \left( U - \frac{P U^3}{3} + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{P^2 U^5}{5} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{P^3 U^7}{7} + \text{etc.} \right)$$

<sup>(1)</sup> Diesen Factor kann man auch das Gewicht der Beobachtung nennen, denn von mehreren Beobachtungen ist offenbar diejenige die beste, in welcher das Gewicht eines Fehlers  $u$ , mithin die Probabilität, daß der Fehler der Beobachtung die Grenzen  $\mp u$  nicht übersteigen werde, am größten ist.

<sup>(2)</sup> Vergl. Laplace a. a. O. p. 103.



oder

$$\frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{\pi}} \cdot U c - P U^2 \left( 1 + \frac{2 P U^2}{1 \cdot 3} + \frac{(2 P U^2)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{(2 P U^2)^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \text{etc.} \right)$$

Diese Reihen convergiren beide am Ende, aber in Gliedern, die weit vom Anfange entfernt sind, wenn nicht  $2 P U^2 =$  oder  $< 4$ . Für grössere Werthe von  $P U^2$  kann man folgende Reihe gebrauchen, welche das obige Integral von  $u = U$  bis  $u = \infty$  giebt

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{c - P U^2}{2 U \sqrt{P}} \left( 1 - \frac{1}{2 P U^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2 P U^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2 P U^2)^3} + \text{etc.} \right);$$

diese Reihe von  $\frac{1}{2}$ , Werth des Integrals von  $u = 0$  bis  $u = \infty$  abgezogen, giebt das Integral von  $u = 0$  bis  $u = U$ ; verdoppelt also das Integral von  $u = -U$  bis  $u = +U$ . Diese Reihe convergirt zwar sehr schnell, wenn  $2 P U^2$  groß ist, aber sie divergirt am Ende, wodurch eine scharfe Rechnung unmöglich gemacht wird. Man gebraucht deshalb lieber den continuirlichen Bruch, den Laplace am angeführten Orte p. 104 angegeben hat, wodurch das ganze Integral von  $u = -U$  bis  $u = +U$ , also die Probabilität, dass der Fehler des erhaltenen Resultats die Grenzen  $\mp U$  nicht übersteigen werde, wird:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{c - P U^2}{U \sqrt{P}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{q}{1} + \frac{2q}{1} + \frac{3q}{1} + \text{etc.}}$$

worin  $q = \frac{1}{2 P U^2}$

Dieser continuirliche Bruch, wenn man ihn immer weiter und weiter ausdehnt, nimmt nacheinander folgende Werthe an

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1 + q}, \quad \frac{1 + 2q}{1 + 3q}, \quad \frac{1 + 5q}{1 + 6q + 3q^2}, \quad \frac{1 + 9q + 8q^2}{1 + 10q + 15q^2},$$



und so fort. Der Zähler des  $i^{\text{ten}}$  Bruchs ist gleich der Summe des Zählers des  $(i-1)^{\text{ten}}$  Bruchs und des mit  $(i-1)q$  multiplicirten Zählers des  $(i-2)^{\text{ten}}$  Bruchs. Eben so verhält es sich mit den Nennern. Man wählt unter diesen Brüchen denjenigen, der die gewünschte Probabilität mit der Schärfe giebt, die man für seinen Zweck verlangt.

5. Wir haben bisher angenommen, daß alle Beobachtungen mit gleicher Sorgfalt und mit demselben Instrument angestellt seien. Da diese Voraussetzung aber fast in keinem Falle ganz richtig ist, so müssen wir lernen, die Güte der Beobachtungen oder ihr Gewicht mit in Rechnung zu bringen. Es wird uns nach den vorhergehenden Betrachtungen leicht werden, uns den Gang, den die Rechnung von Anfang an zu nehmen hat, zu bezeichnen; befolgen wir diese Vorschriften in Zukunft, so werden wir gewiß seyn, das genaueste Resultat, das nur möglich ist, aus unsern Beobachtungen zu ziehen.

Ein Winkel  $A$  sei mit  $n$  Repetitionskreisen gemessen. Die Werthe desselben seien nach diesen  $n$  Messungen  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ , die Zahl der Repetitionen, die man bei jeder Messung gemacht hat, sei  $s_1, s_2, s_3 \dots s_n$ . Der mittlere Fehler, der im Resultat jeder Messung, in positiver sowohl als in negativer Richtung zu erwarten ist, wird nach dem Obigen aus der Summe der Quadrate der Differenzen jeder einzelnen Repetition und des Resultats jeder einzelnen Messung gefunden. Diese Summe der Quadrate der Fehler der einzelnen Beobachtungen, seien  $E_1, E_2, E_3 \dots E_n$ , so ist nach dem Obigen der in der  $i^{\text{ten}}$  Messung zu erwartende mittlere Fehler

$$\pm \sqrt{\frac{E_i}{2 s_i \pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s_i}} = \frac{1}{s_i} \sqrt{\frac{E_i}{2 \pi}}$$



Will man also die gefundenen Werthe  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  geschickt combiniren, so hat man, wie oben, folgende Tafel zu entwerfen

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mp \frac{1}{s_1} \sqrt{\frac{E_1}{2\pi}} &= A \\ \alpha_2 \mp \frac{1}{s_2} \sqrt{\frac{E_2}{2\pi}} &= A \\ \alpha_3 \mp \frac{1}{s_3} \sqrt{\frac{E_3}{2\pi}} &= A \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_n \mp \frac{1}{s_n} \sqrt{\frac{E_n}{2\pi}} &= A \end{aligned} \quad (1)$$

Um diese Tafel zur Anwendung der vortheilhaftesten Methode geschickt zu machen, muß man erst, wie oben gezeigt ist, eine gleichmäßige Vertheilung der Fehler hervorbringen; das geschieht, indem man jede Gleichung durch ihren mittleren Fehler dividirt, wodurch alle Fehler gleich  $\mp 1$  werden. Das giebt folgende Tafel

$$\begin{aligned} s_1 \sqrt{\frac{2\pi}{E_1}} \cdot \alpha_1 \mp 1 &= s_1 \sqrt{\frac{2\pi}{E_1}} \cdot A \\ s_2 \sqrt{\frac{2\pi}{E_2}} \cdot \alpha_2 \mp 1 &= s_2 \sqrt{\frac{2\pi}{E_2}} \cdot A \\ s_3 \sqrt{\frac{2\pi}{E_3}} \cdot \alpha_3 \mp 1 &= s_3 \sqrt{\frac{2\pi}{E_3}} \cdot A \\ &\dots\dots\dots \\ s_n \sqrt{\frac{2\pi}{E_n}} \cdot \alpha_n \mp 1 &= s_n \sqrt{\frac{2\pi}{E_n}} \cdot A \end{aligned}$$

Aus den so umgeänderten Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate das Resultat genommen, giebt als den genauesten Werth von  $A$

$$A_1 = \frac{\frac{s_1^2}{E_1} \cdot \alpha_1 + \frac{s_2^2}{E_2} \cdot \alpha_2 + \frac{s_3^2}{E_3} \cdot \alpha_3 + \dots + \frac{s_n^2}{E_n} \cdot \alpha_n}{S \cdot \frac{s_n^2}{E_n}}$$



Aus dem Obigen ist aber offenbar  $\frac{s_i^2}{2E_i}$  das Gewicht des aus der  $i^{\text{ten}}$  Messung hervorgehenden Werthes von  $A$ , also, wenn wir dieses mit  $P_i$  bezeichnen wollen

$$\frac{s_i^2}{E_i} = 2 P_i$$

und der genaueste Werth von  $A$

$$A_1 = \frac{P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + P_3 \alpha_3 + \dots + P_n \alpha_n}{S \cdot P_n}$$

Auf dieselbe Art wird man den genauesten Werth  $B_1$  eines Winkels  $B$  finden, den man mit  $p$  Repetitionskreisen gemessen hat, welche nacheinander die Werthe  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots \beta_p$  gegeben haben. Es ist nämlich, wenn man mit  $Q_1, Q_2, Q_3 \dots Q_p$  das Gewicht des aus jeder Messung hervorgehenden Werthes von  $B$  bezeichnet:

$$B_1 = \frac{Q_1 \beta_1 + Q_2 \beta_2 + Q_3 \beta_3 + \dots + Q_p \beta_p}{S \cdot Q_p}$$

Man kann das Gewicht dieser beiden Werthe von  $A$  und  $B$  eben so bestimmen, wie man die Gewichte der Werthe  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  etc. und  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  etc. berechnet hat. Um den von  $A$  zu finden, setzt man in die Tafel (2), in welcher die Fehler eine gleichmäfsige Vertheilung haben, für  $A_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  etc. ihre Werthe, erhebt die Differenzen  $s_1 \sqrt{\frac{2\pi}{E_1}} (\alpha_1 - A_1), s_2 \sqrt{\frac{2\pi}{E_2}} (\alpha_2 - A_2),$  etc. <sup>(1)</sup> ins Quadrat, summirt diese Quadrate, multiplicirt diese Summe mit 2 und dividirt durch dieses Product die  $n$  fache Summe der Factoren  $s_1 \sqrt{\frac{2\pi}{E_1}}, s_2 \sqrt{\frac{2\pi}{E_2}}$  etc.

(<sup>1</sup>) Das heisst, die Fehler der Beobachtungen, welchen man durch die in der Tafel (2) vorgenommene Behandlung eine gleichmäfsige Vertheilung gegeben hat, so dass sie Fehlern, welche der Zufall giebt, gleich gestellt werden können.



Bezeichnet man dieses Gewicht mit  $P'$ , so ist

$$P' = \frac{n (P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n)}{2 (P_1 (\alpha_1 - A_1)^2 + P_2 (\alpha_2 - A_1)^2 + P_3 (\alpha_3 - A_1)^2 + \dots + P_n (\alpha_n - A_1)^2)}$$

Eben so ist das Gewicht von  $B_1$

$$Q' = \frac{p (Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_p)}{2 (Q_1 (\beta_1 - B_1)^2 + Q_2 (\beta_2 - B_1)^2 + Q_3 (\beta_3 - B_1)^2 + \dots + Q_p (\beta_p - B_1)^2)}$$

Es sey nun  $A$  eine bekannte Function von  $B$ ; eine geschickte Combination der Gleichungen

$$A = A_1$$

$$A = A_2$$

worin  $A_2$  der aus  $B_1$  berechnete Werth von  $A$  ist, wird alsdann einen der Wahrheit noch näher kommenden Werth von  $A$  geben.

Wäre  $P' = Q'$ , so brauchte man nur, wie wir oben gefunden haben, jede dieser Gleichungen mit ihrem Differentialquotienten zu multipliciren, um eine gleichmäfsige Vertheilung der Fehler hervorzubringen. Da aber diese Gleichheit nicht statt findet, so mufs jeder Differentialquotient noch mit einer Gröfse multiplicirt werden, die sich umgekehrt wie der in  $A_1$ ,  $B_1$  zu erwartende mittlere Fehler verhält. Eine solche Gröfse ist aber  $\sqrt{P'}$ ,  $\sqrt{Q'}$ . Die beiden Gleichungen werden also folgende Gestalt annehmen

$$1 \cdot \sqrt{P'} \cdot A = 1 \cdot \sqrt{P'} \cdot A_1$$

$$\frac{dB_1}{dA_2} \cdot \sqrt{Q'} \cdot A = \frac{dB_1}{dA_2} \cdot \sqrt{Q'} \cdot A_2$$

Wenn man jetzt die Methode der kleinsten Quadrate anwendet, und den daraus hervorgehenden Werth von  $A$  mit  $A_T$  bezeichnet, so ist



$$A_T = \frac{1 \cdot P^1 \cdot A_1 + \left(\frac{dB_1}{dA_2}\right)^2 \cdot Q^1 \cdot A_2}{1 \cdot P^1 + \left(\frac{dB_1}{dA_2}\right)^2 Q^1}$$

Dieses Verfahren läßt sich leicht auf soviel Winkel man will ausdehnen. Es seien  $m$  Winkel  $A, B, C, D$  etc. auf mancherlei Art wiederholt gemessen; die aus diesen Messungen sich ergebenden Werthe derselben seien  $A_1, B_1, C_1, D_1$  etc., ihre respectiven Gewichte seien  $P^1, Q^1, R^1, S^1$  etc.; die aus  $B_1, C_1, D_1$  etc. berechneten Werthe von  $A$  seien  $A_2, A_3, A_4 \dots A_m$ , so ist der genaueste Werth von  $A$

$$A_T = \frac{1 \cdot P^1 \cdot A_1 + \left(\frac{dB_1}{dA_2}\right)^2 \cdot Q^1 \cdot A_2 + \left(\frac{dC_1}{dA_3}\right)^2 R^1 A_3 + \text{etc.}}{1 \cdot P^1 + \left(\frac{dB_1}{dA_2}\right)^2 Q^1 + \left(\frac{dC_1}{dA_3}\right)^2 R^1 + \text{etc.}}$$

Eben so leicht findet sich, daß das Gewicht  $P''$  des so eben gefundenen Werthes von  $A$  ist:

$$P'' = \frac{m \left( 1 \cdot P^1 + \left(\frac{dB_1}{dA_2}\right)^2 Q^1 + \left(\frac{dC_1}{dA_3}\right)^2 R^1 + \text{etc.} \right)}{2 \left[ 1 \cdot P^1 (A_1 - A_T)^2 + \left(\frac{dB_1}{dA_2}\right)^2 Q^1 (A_2 - A_T)^2 + \left(\frac{dC_1}{dA_3}\right)^2 R^1 (A_3 - A_T)^2 \right]}$$

oder, da  $\frac{dB_1}{dA_2} (A_2 - A_T) = (B_1 - B_T)$ ;  $\frac{dC_1}{dA_3} (A_3 - A_T) = (C_1 - C_T)$  etc., (wo man die aus  $A_T$  bezeichneten Werthe von  $B, C, D$  etc. mit  $B_T, C_T, D_T$  etc. bezeichnet)

$$P'' = \frac{m \left[ 1 P^1 + \left(\frac{dB_1}{dA_2}\right)^2 Q^1 + \left(\frac{dC_1}{dA_3}\right)^2 R^1 + \text{etc.} \right]}{2 \left[ 1 \cdot P^1 (A_1 - A_T)^2 + Q^1 (B_1 - B_T)^2 + R^1 (C_1 - C_T)^2 + \text{etc.} \right]}$$

Wie man aus  $P''$  die Probabilität berechnet, daß der Fehler dieses Resultats die Grenzen  $\mp U$  nicht übersteigen werde, haben wir hinlänglich gesehen.



Wenn wir eine groſſe Menge von Beobachtungen auf diese Weise werden behandelt haben, so werden wir bald sehr genäherte Werthe der beobachteten Winkel besitzen. Man wird sich dann die Aufgabe machen können, diese genäherten Werthe, deren Gewicht man nicht einmal kennt, durch eine neue Reihe von Beobachtungen der Wahrheit näher zu bringen. In diesem Fall verfährt man auf folgende Weise.

Es sei  $A_T$ , der genäherte Werth von  $A$ , den man schon kennt,  $A_1, B_1, C_1, D_1$  etc. seien die Werthe, die eine neue Reihe von Beobachtungen der Winkel  $A, B, C, D$  etc. giebt;  $P^1, Q^1, R^1$  etc. seien die Gewichte dieser Werthe; die aus diesen neuen Beobachtungen hervorgehenden Werthe von  $A$  seien  $A_1, A_2, A_3, A_4$  etc., so ist die der Wahrheit am nächsten kommende Correction von  $A_T$

$$C_T = \frac{1 \cdot P^1 (A_T - A_1) + \left(\frac{dB_1}{dA_1}\right)^2 Q^1 (A_T - A_2) + \text{etc.}}{1 P^1 + \left(\frac{dB_1}{dA_1}\right)^2 Q + \text{etc.}}$$

Dieses Verfahren fließt so unmittelbar aus dem Obigen, daß es keines besonderen Beweises bedarf.

6. Auf diese Weise müssen wir auch die Fälle behandeln, wo zwei Winkel zur Bestimmung einer Krystallform nothwendig sind. Es seien z.B. beim Topas die Neigungswinkel  $B$  und  $C$  der Zuspitzungsflächen <sup>(1)</sup>, welche auf die Flächen der geschobenen vierseitigen Säule von etwa  $124^\circ$  grade aufgesetzt sind, gemessen; überdies noch der doppelte Neigungswinkel derselben Flächen gegen die Axe  $I$ , der ebene Winkel an der Spitze  $a$ , und die Neigung ihrer Endkanten gegen die Axe  $r$  und  $r'$ . Diese Winkel hängen durch folgende Gleichungen untereinander zusammen:

<sup>(1)</sup> welche Haüy in der zweiten Ausgabe seines *Traité de minéralogie* mit  $k$  bezeichnet.



$$\sin^2 \frac{1}{2} I = \sin^2 \frac{1}{2} B - \cos^2 \frac{1}{2} C = - \cos \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} (B-C)$$

$$\cos a = \cot \frac{1}{2} B \cdot \cot \frac{1}{2} C$$

$$\cot^2 r' = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} B}{\sin^2 \frac{1}{2} B - \cos^2 \frac{1}{2} C} = - \frac{\cos^2 \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} (B-C)}$$

$$\cot^2 r = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} C}{\sin^2 \frac{1}{2} B - \cos^2 \frac{1}{2} C} = - \frac{\cos^2 \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} (B-C)}$$

Hieraus

$$dI = \frac{\sin B}{\sin I} dB + \frac{\sin C}{\sin I} \cdot dC$$

$$da = \frac{\cot \frac{1}{2} C}{2 \sin^2 \frac{1}{2} B} dB + \frac{\cot \frac{1}{2} B}{2 \sin^2 \frac{1}{2} C} dC$$

$$dr' = - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C \cdot \sin B \sin^3 r'}{4 \cos r' \cdot \cos \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} (B-C)} dB - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} B \sin C \sin^3 r'}{4 \cos r' \cos \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} (B-C)} \cdot dC$$

$$dr = - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C \cdot \sin B \sin^3 r}{4 \cos r \cdot \cos \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} (B-C)} dB - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} B \cdot \sin C \sin^3 r}{4 \cos r \cos \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} (B-C)} dC$$

Wir nehmen an, daß die Werthe von  $B$  und  $C$ , die aus den Messungen hervorgehen, um  $dB$ ,  $dC$  falsch sind. Diese Correctionen der Werthe von  $B$  und  $C$  müssen also mit Hülfe der übrigen Messungen gefunden werden. Wir berechnen deshalb aus den durch die Messung gefundenen Werthen von  $B$  und  $C$  die Winkel  $I$ ,  $a$ ,  $r$  und  $r'$ , ziehen diese berechneten Winkel von den beobachteten ab, und setzen diese Differenzen an die Stelle der Differentiale der berechneten Winkel, aus welchen sich die Differentiale  $dB$  und  $dC$  nach den obigen Formeln finden lassen. Wir entwerfen folgende Tafel, in welcher  $I_1$ ,  $a_1$ ,  $r_1$  und  $r'_1$  die aus  $B$  und  $C$  berechneten Werthe der gleichnamigen Winkel;  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  die Gewichte der beobachteten Werthe von  $I$ ,  $a$ ,  $r$  und  $r'$ ;  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$  die Coefficienten von  $dB$ ;  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$  die Coefficienten von  $dC$  in den obigen Formeln bedeuten.



$$\begin{aligned} \sqrt{P} (I_1 - I) &= \sqrt{P} \cdot p_1 dB + \sqrt{P} \cdot q_1 dC \\ \sqrt{Q} (a_1 - a) &= \sqrt{Q} \cdot p_2 dB + \sqrt{Q} \cdot q_2 dC \\ \sqrt{R} (r_1 - r) &= \sqrt{R} \cdot p_3 dB + \sqrt{R} \cdot q_3 dC \\ \sqrt{S} (r'_1 - r) &= \sqrt{S} \cdot p_4 dB + \sqrt{S} \cdot q_4 dC \end{aligned}$$

In dieser Tafel sind, nach unsern bisherigen Betrachtungen, die Beobachtungsfehler gleichmäfsig vertheilt; wir können also die Methode der kleinsten Quadrate unmittelbar auf dieselbe anwenden, d. h. wir multipliciren jede Gleichung zuerst mit dem Coefficienten von  $dB$ , nachher mit dem von  $dC$ , addiren die Gleichungen, die mit dem Coefficienten von  $dB$  multiplicirt worden sind, zusammen, und thun dasselbe mit den Gleichungen, die wir mit dem Coefficienten von  $dC$  multiplicirt haben. So bekommen wir folgende zwei Endgleichungen:

$$\begin{aligned} 1) \quad & P \cdot p_1 (I_1 - I) + Q p_2 (a_1 - a) + R p_3 (r_1 - r) + S p_4 (r'_1 - r) \\ &= (P \cdot p_1^2 + Q p_2^2 + R p_3^2 + S p_4^2) dB + (P q_1 p_1 + Q q_2 p_2 + R q_3 p_3 + S q_4 p_4) dC \\ 2) \quad & P q_1 (I_1 - I) + Q q_2 (a_1 - a) + R q_3 (r_1 - r) + S q_4 (r'_1 - r) \\ &= (P q_1 p_1 + Q q_2 p_2 + R q_3 p_3 + S q_4 p_4) dB + (P q_1^2 + Q q_2^2 + R q_3^2 + S q_4^2) dC \end{aligned}$$

aus welchen sich  $dB$  und  $dC$  leicht eliminiren lassen. Alsdann sind  $B + dB$ ,  $C + dC$  die verbesserten Werthe von  $B$  und  $C$ . Will man das Gewicht dieser verbesserten Werthe von  $B$  und  $C$  finden, so berechnet man wie vorher aus diesen Werthen die übrigen Winkel, zieht die berechneten Werthe von den beobachteten ab, erhebt die Differenzen ins Quadrat, multiplicirt sie mit den Gewichten der beobachteten Werthe und nennt die Summe dieser Quadrate  $E$ . Diese Summe der Quadrate der Fehler verdoppelt, und in den mit der Anzahl der Beobachtungen (oder der Bedingungsgleichungen) multiplicirten Coefficienten des aus den Gleichungen zuletzt hervorgehenden Werthes von  $dB$  dividirt, giebt das



Gewicht  $P_1$  von  $dB$ . Dieselbe verdoppelte Summe der Quadrate der Fehler in den mit der Anzahl der Beobachtungen multiplicirten Coefficienten des aus den Gleichungen zuletzt hervorgehenden Werthes von  $dC$  dividirt, giebt das Gewicht  $P_2$  von  $dC$ . Die Elimination von  $dB$  und  $dC$  muß dabei auf folgende Weise vorgenommen werden, um die gleichmäfsige Vertheilung der Fehler zu erhalten: Man sucht zuerst den Werth von  $dC$ , indem man die obigen vier Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt; den auf diese Art gefundenen Werth von  $dC$  (eine lineäre Function von  $dB$ ) substituirt man in dieselben vier Bedingungsgleichungen und behandelt sie nun ebenfalls nach der Methode der kleinsten Quadrate, wodurch man eine Endgleichung erhält, in welcher der Coefficient von  $dB$  eben der gesuchte ist. Eben so verfährt man, um den Coefficienten von  $dC$  zu finden. So erhält man

$$P_1 = \frac{4}{2E} \cdot \frac{(Pp_1^2 + Qp_2^2 + Rp_3^2 + Sp_4^2)(Pq_1^2 + Qq_2^2 + Rq_3^2 + Sq_4^2) - (Pp_1q_1 + Qp_2q_2 + Rp_3q_3 + Sp_4q_4)^2}{Pq_1^2 + Qq_2^2 + Rq_3^2 + Sq_4^2}$$

$$P_2 = \frac{4}{2E} \cdot \frac{(Pq_1^2 + Qq_2^2 + Rq_3^2 + Sq_4^2)(Pp_1^2 + Qp_2^2 + Rp_3^2 + Sp_4^2) - (Pp_1q_1 + Qp_2q_2 + Rp_3q_3 + Sp_4q_4)^2}{Pp_1^2 + Qp_2^2 + Rp_3^2 + Sp_4^2}$$

Aus  $P_1$  und  $P_2$  lassen sich nach den oben angegebenen Formeln leicht die Probabilitäten eines Fehlers  $u$  berechnen.

So wären wir denn im Besitz einer Methode, unsere Beobachtungen zu combiniren, die nichts zu wünschen übrig läßt, und deren sich die Astronomen schon seit langer Zeit mit solchem Erfolg bedienten. Laplace's unübertreffliche Arbeit hat mir erlaubt, kurz zu seyn; in ihr wird jeder Leser, der den Gegenstand allgemeiner dargestellt haben will, volle Befriedigung finden.

Ich erinnere nur noch, daß bei allen diesen Formeln eine große Anzahl von scharfen Beobachtungen vorausgesetzt ist; daß



die Beobachtungen unter den mannigfaltigsten Umständen und in mehreren Reihen vorgenommen werden müssen, um auch denjenigen Fehlern, die in derselben Reihe von Beobachtungen constant bleiben, eine gleichmäßige Vertheilung in positiver und negativer Richtung zu geben — daß also, wenn man eine solche Arbeit über mehrere Krystallisationssysteme ausdehnt, erst nach Jahrzehenden die Anwendung dieser Methode schöne Früchte tragen wird.

II. Von den Fehlern, die von den Instrumenten und von der Handhabung derselben herrühren.

Es giebt für jedes Instrument gewisse Umstände, unter welchen die Beobachtungen mit demselben genauer ausfallen, als unter allen andern. Aber selbst wenn diese Bedingungen einer genauen Messung erfüllt sind, so kann dennoch das Instrument selbst Fehler in seinem Bau haben, welche dem Gange desselben eine falsche Richtung geben: diese Fehler werden indess wegen der Unveränderlichkeit des Instruments, die wenigstens für eine gewisse Zeit als unverletzt angenommen werden kann, in einer bestimmbaren Abhängigkeit von demselben stehn. Jene Bedingungen und diese Abhängigkeit zu erkennen, soll jetzt unser Geschäft seyn. Eine specielle Kenntniß der Instrumente ist dabei nothwendig.

1. Das Haüy'sche Goniometer.

Das so nach seinem letzten Verbesserer benannte, von Carrangeau aber erfundene Goniometer ist zu bekannt, als daß es einer genauen Beschreibung bedürfte <sup>(1)</sup>. Ueberdies ist es wegen

(1) Man kann eine solche finden in Haüy *Traité de Minéralogie*.



seiner Unvollkommenheiten so wenig zu unserm Zweck geschickt, daß wir nie Gebrauch davon machen werden. Haüy hat sich dessen bloß bedient, um unter annehmbaren Verhältnissen der Dimensionen seines Krystallkerns (*noyau, forme primitive*), die er so einfach als möglich wünscht, um die Berechnung und Auseinandersetzung der geometrischen Eigenschaften eines Krystalls zu erleichtern, dasjenige auszuwählen, das der Natur am nächsten tritt, und dazu ist freilich kein ausgezeichnetes Instrument nöthig. Durch Uebung bringt man es bald dahin, die Winkel bis auf einen halben, ja viertel Grad zu bestimmen: man nimmt erst eine rohe Messung vor, macht dann den Winkel, den die Alidade, die leicht beweglich seyn muß, mit dem fixen Durchmesser des getheilten Halbkreises macht, etwas spitzer, stellt das Instrument vertical <sup>(1)</sup> zwischen sich und einem Fenster parallel mit dem letzteren, legt die eine Krystallebene an den festen Durchmesser etwas unterhalb dem Durchschnittspunkt desselben mit der Alidade, so daß die andere Krystallebene nach oben zu liegen kommt, und die Krystallkante so viel als möglich einen rechten Winkel mit der Ebene des getheilten Halbkreises macht, und schiebt den Krystall nun langsam in die Höhe an die Alidade heran, bis diese die zweite Krystallebene vollkommen deckt <sup>(2)</sup>.

Die Bedingungen bei der Anwendung dieses Instruments sind sehr einfach. Man muß dafür sorgen, daß Alidade und fester Durchmesser die Krystallebene recht decken, und daß die Krystallkante mit der Ebene des getheilten Kreises einen rechten Winkel mache. Seine Fehler können in der Theilung des Halbkreises

(<sup>1</sup>) Das heißt so, daß der fixe Durchmesser vertical zu stehen kommt.

(<sup>2</sup>) Diese Methode schien mir für Ungeübte die beste; Uebung indeß kann bei einem solchen Instrument leicht jeder andern Methode den Vorzug verschaffen.



und in der Centrirung desselben liegen. Seine Vorzüge bestehen besonders darin, daß seine Anwendung leicht und überall zulässig ist, bei matten Krystallebenen eben so wohl, als bei glänzenden. Man kann die Fehler eines Häüy'schen Goniometers nicht anders, als durch eine sehr große Anzahl von Beobachtungen entdecken, um den Einfluß der Sinnesfehler, die hier einen so großen Spielraum haben, zu vernichten.

Die Fehler der Eintheilung des Halbkreises sind kaum zu fürchten, weil sie bei der Vollkommenheit der gebräuchlichen Theilungsmethode weit innerhalb der Grenzen bleiben, in welchen der im Resultat so unvollkommener Messungen zu erwartende Fehler hin und her schwankt. Sollte man indeß Ursache haben, große Fehler zu vermuthen, so kann man sich leicht von ihrem Daseyn überzeugen, indem man irgend einen Winkel mit hinlänglich langen Schenkeln (etwa aus steifem Papier geschnitten) an mehreren Stellen auf den getheilten Halbkreis legt, so daß jeder Schenkel des Winkels den Halbkreis an zwei Punkten durchschneidet. Die Differenzen der gegenüberliegenden Bogen, welche die beiden Schenkel abschneiden, müssen alle einander gleich seyn, sie mögen liegen, wo sie wollen, wenn die Theilung richtig ist; im entgegengesetzten Falle ist sie unrichtig.

Von den übrigen Fehlern, die das Instrument haben kann, wollen wir uns nur noch mit dem Centrirungsfehler beschäftigen, weil dieser sich bei den folgenden Instrumenten wieder finden wird.

Es sei Fig. 1. ein getheilter Halbkreis, dessen Mittelpunkt in  $C$  liegt. Ein anderer Punkt  $D$ , dessen Mittelpunktscoordinaten  $CB = a$ ,  $BD = b$  sind, sei der Mittelpunkt der Drehung der Alidade  $AF$ . Die Figur stellt die beiden Lagen der Alidade



vor, wenn derselbe Winkel  $\alpha$  zweimal gemessen wird, indem der Krystall das eine Mal von  $H$  her, das andere Mal von  $G$  her an die Alidade geschoben wird. Es ist also  $HfA' = GhA = \alpha$ . Die beiden Winkel, welche die Alidade in beiden Lagen anzeigt, sind  $FCG$  und  $F'CG$ , wenn die Grade von  $G$  an gezählt werden. Es ist aber offenbar  $180^\circ - FCG > AhG$ ,  $FCG$  selbst also zu klein; eben so ist  $F'CG < A'fH$ ; die Summe der beiden von der Alidade abgeschnittenen Bogen wird also kleiner als  $180^\circ$  seyn. Es sei  $FCG = \beta$ ,  $F'CG = \gamma$ ,  $CF A = \phi$ ,  $CF' A' = \phi'$ . In dem Dreieck  $CD F$  wissen wir zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, nämlich  $CF = 1$ ,  $CD = \sqrt{a^2 + b^2}$  und  $DCF = \beta - \text{Arc. (tang. } = \frac{b}{a})$ ; also

$$\text{tang. } \phi = \frac{a \sin \beta - b \cos \beta}{1 - a \cos \beta - b \sin \beta} \quad (1)$$

und eben so

$$\text{tang. } \phi' = \frac{a \sin \gamma - b \cos \gamma}{1 - a \cos \gamma - b \sin \gamma}$$

Hieraus endlich

$$\text{tang. } (\phi + \phi') = - \text{tang. } (\beta + \gamma) = \frac{a (\sin \beta + \sin \gamma) - b (\cos \beta + \cos \gamma) - a^2 \sin (\beta + \gamma) + 2ab \cos (\beta + \gamma) + b^2 \sin (\beta + \gamma)}{1 - a (\cos \beta + \cos \gamma) - b (\sin \beta + \sin \gamma) - a^2 \cos (\beta + \gamma) + 2ab \sin (\beta + \gamma) - b^2 \cos (\beta + \gamma)}$$

Man kann sich dabei erlauben  $a^2 = b^2 = ab = 0$  zu setzen, da  $a$  und  $b$  sehr klein sind. So findet man:

$$a (\sin \gamma + \sin \beta) + b (\cos \beta + \cos \gamma) - \sin (\beta + \gamma) = 0$$

Beobachtet man recht viele Winkel auf diese Art, und sammelt so recht viele verschiedene Werthe von  $\beta$  und  $\gamma$ , so kann man eine Menge Bedingungsgleichungen construiren, wie die eben gefundenen, aus deren Combination zwei der Wahrheit sehr nahe kommende Werthe von  $a$  und  $b$  hervorgehen werden.



In dieser Rechnung ist vorausgesetzt, daß  $\beta = FCG$ ,  $\gamma = F'CG$ . Wenn aber die Gradeintheilung nicht genau in  $G$  anfängt, oder wenn eine Linie, aus dem Mittelpunkt der Drehung der Alidade nach dem von derselben angezeigten Punkte auf dem Umfange des getheilten Kreises gezogen, nicht mit den Seiten der Alidade, die man an die Krystallebene anlegt, parallel ist, oder die beiden Seiten der Alidade unter sich nicht parallel sind, so ist die obige Voraussetzung falsch. Der Fehler, der hieraus entsteht, bleibt indefs für alle Winkel constant; wir wollen ihn  $c$  nennen. Setzt man in die obige Bedingungsgleichung statt  $\beta$  und  $\gamma$  ihre korrigirten Werthe  $\beta + c$ ,  $\gamma + c$ , und setzt dabei  $a \text{ tang. } c = b \text{ tang. } c = 0$ , weil es die Producte so kleiner Gröfsen sind, so bekommt sie folgende Gestalt:

$$a (\sin \beta + \sin \gamma) + b (\cos \beta + \cos \gamma) - \text{tang. } 2c \cdot \cos (\beta + \gamma) - \sin (\beta + \gamma) = 0$$

Die geschickte Combination einer großen Anzahl solcher Bedingungsgleichungen wird die unbekannten Gröfsen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  mit ziemlicher Genauigkeit geben.

Differentiirt man die Gleichung (1) erst in Bezug auf  $a$ , nachher in Bezug auf  $b$ , so findet man

$$\frac{\frac{d\phi}{da}}{\frac{d\phi}{db}} = \frac{\sin \beta - b}{a - \cos \beta}$$

Dieser Bruch wird  $= 1$ , wenn  $\sin \beta - b = a - \cos \beta$  oder  $\sin \beta = \frac{a+b}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(a+b)^2}{4}}$ ; alsdann ist der Einfluß von  $a$  auf den Fehler der Messung eben so groß, als der von  $b$ ; zwischen diesen beiden Grenzen wird der Einfluß von  $b$  immer geringer, je mehr sich  $\beta$  einem Werth nähert, der  $\cos \beta = a$  macht.



Wenn  $a$  und  $b$  nicht sehr groß sind, so sind diese Grenzen ungefähr  $\mp \sqrt{\frac{1}{2}}$ ; also  $\beta = 45^\circ$  und  $\beta = 135^\circ$  die Grenzwerte, innerhalb welcher man  $b$  vernachlässigen kann, mit desto mehr Recht, je näher  $\beta$  einem rechten Winkel kommt — und die meisten Krystallwinkel fallen innerhalb dieser Grenzen. Alsdann ist  $\text{tang. } \phi = \frac{\sin \psi \sin^2 \beta}{\sin (\beta - \psi)}$  wenn man  $\text{tang. } \psi = a$  macht.

## 2. Das Wollastonsche Goniometer.

Beschreibungen von Wollaston's Goniometer findet man an vielen Orten, auch in Biot's *Traité de Physique*. Die Art wie man mit demselben mißt, ist ebenfalls sehr bekannt. Man stellt das Instrument an ein offenes Fenster, in einiger Entfernung, damit nicht das Tageslicht zu heftig darauf fällt, und durch Blendung die gespiegelten Gegenstände undeutlich macht, auf einen hohen Tisch, befestigt dasselbe mit Wachs so auf demselben, daß die Ebene des getheilten Kreises einen erhabenen Gegenstand trifft, den man in großer Entfernung aus dem Fenster sieht, und der zwei horizontale Streifen übereinander hat, z. B. ein entferntes Haus mit zwei Fensterreihen. Dann giebt man dem Krystalle vermöge des Gestelles, worauf er befestigt ist, und welches drei aufeinander senkrechte Bewegungen erlaubt, eine solche Lage, daß es dem Beobachter möglich wird, das auf den Krystallflächen, einer nach der andern, abgespiegelte Bild des obern Horizontalstreifens mit dem untern Streifen genau zusammenfallen zu sehen. Ist der Krystall auf diese Art in die rechte Lage gebracht, so stellt man das 0 des getheilten Kreises auf das 0 des Nonius; dreht erst den Krystall allein, bis das auf der einen Fläche abgespiegelte Bild des obern Streifens mit dem untern direct gesehenen Streifen zusammenfällt, und dreht dann den eingetheilten Kreis, der den Krystall



zugleich mit sich führt, bis dasselbe auf der andern Fläche statt findet; der Winkel, den der eingetheilte Kreis an dem Nonius zurückgelegt hat, ist das Complement des gesuchten Neigungswinkels der beiden Krystallflächen zu  $180^\circ$ .

Man erlangt eine größere Genauigkeit, wenn man die Winkel so oft als möglich repetirt; ich habe deshalb bei meinem Instrument die Stücke, welche dazu dienten, die Drehung des Kreises bei  $0^\circ$  und  $180^\circ$  aufzuhalten, weggelassen; man bringt, nachdem man den Winkel einmal gemessen hat, den Krystall wieder in seine erste Lage, ohne den Kreis mitzudrehen, mißt wieder, den Kreis drehend, liest auf der Eintheilung ab, und wiederholt dies so oft man will.

Um die Theorie dieses geistreich erfundenen Instruments recht ins Klare zu bringen, denke man sich drei rechtwinklichte Coordinatebenen, die eine (die der  $xz$ ) durch den getheilten Kreis gelegt.

Die Coordinaten der zwei Gegenstände, nach denen visirt wird, und die wir uns als Punkte denken, seyen  $X', Y', Z'$  und  $X'', Y'', Z''$ ; der Punkt auf der Krystallebene, wo sich der erste und obere Gegenstand abspiegelt, habe  $x', y', z'$  zu Coordinaten. Man denke sich durch diese drei Punkte die Ebene der Tafel I gelegt;  $A$  (Fig. 2) sei der erste obere Gegenstand,  $B$  der zweite untere,  $C$  das Bild des obern auf der Krystallfläche, so muß sich das Auge des Beobachters in der Verlängerung der Linie  $BC$ , etwa in  $D$ , befinden, um den Punkt  $C$  mit  $B$  zusammenfallen zu sehen. Die Krystallfläche, deren Durchschnittslinie mit der Ebene  $ACB$ ,  $EF$  seyn mag, ist nothwendig senkrecht auf derselben, und hat eine solche Lage, daß die Linie  $AC$  denselben Winkel mit ihr macht, als  $CD$  oder  $BC$ . Die allgemeinen Gleichungen der Linien  $AC$  und  $BC$  seien



$\left. \begin{aligned} x &= a'z + \alpha' \\ y &= b'z + \beta' \end{aligned} \right\}$  die Gleichungen der Linie  $AC$   
 $\left. \begin{aligned} x &= a''z + \alpha'' \\ y &= b''z + \beta'' \end{aligned} \right\}$  die Gleichungen der Linie  $BC$

so ist, da  $AC$  durch die Punkte  $A$ , dessen Coordinaten  $X', Y', Z'$ , und  $C$ , dessen Coordinaten  $x', y', z'$  sind, geht:

$$a' = \frac{X' - x'}{Z' - z'}; \quad \alpha' = \frac{x'Z' - z'X'}{Z' - z'}$$

$$b' = \frac{Y' - y'}{Z' - z'}; \quad \beta' = \frac{y'Z' - z'Y'}{Z' - z'}$$

und da  $BC$  durch denselben Punkt  $C$ , und durch den Punkt  $B$  geht, dessen Coordinaten  $X'', Y'', Z''$

$$a'' = \frac{X'' - x'}{Z'' - z'}; \quad \alpha'' = \frac{x'Z'' - z'X''}{Z'' - z'}$$

$$b'' = \frac{Y'' - y'}{Z'' - z'}; \quad \beta'' = \frac{y'Z'' - z'Y''}{Z'' - z'}$$

Um nun die Gleichung der Ebene zu finden, welche senkrecht auf die Ebene  $ABC$  ist und zugleich mit der Linie  $EF$  zusammenfällt, welche den Winkel  $ACB$  halbirt, denkt man sich eine Linie, die durch den Punkt  $C$  geht, deren allgemeine Gleichungen man also unter folgende Form bringen kann

$$\left. \begin{aligned} (x - x') &= a(z - z') \\ (y - y') &= b(z - z') \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Diese mache mit  $AC$  denselben Winkel als mit  $BC$ , also noch eine Bedingung:

$$\frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a'a' + b'b')}} = \frac{1 + aa'' + bb''}{\sqrt{(1 + a''a'' + b''b'')}} \quad (1) \dots \dots (2)$$

(1) Nennt man den Winkel, den die Linie mit  $AC$  macht  $V$ , den, den sie mit  $BC$  macht  $V'$ , so ist bekanntlich

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a'a' + b'b')}} \sqrt{(1 + aa + bb)}$$

$$\cos V' = \frac{1 + aa'' + bb''}{\sqrt{(1 + a''a'' + b''b'')}} \sqrt{(1 + aa + bb)}$$



Bestimmt man diese Linie nicht weiter, so sieht man leicht ein, daß es deren unendlich viele giebt; sie liegen aber alle in der gesuchten Ebene; die Gleichung (2) kann also eine Gleichung dieser Ebene abgeben, wenn man für  $a$  und  $b$  ihre aus (1) eliminirten veränderlichen Werthe substituirt. Setzt man nun auch für  $a'$ ,  $b'$ ,  $a''$ ,  $b''$  ihre oben gefundenen Werthe, so findet man, wenn man vorher

$$\sqrt{(Z' - z')^2 + (Y' - y')^2 + (X' - x')^2} = D'$$

$$\sqrt{(Z'' - z')^2 + (Y'' - y')^2 + (X'' - x')^2} = D''$$

gemacht hat, folgende Gleichung der Krystallebene.

$$[D'(X' - x') - D'(X'' - x')]x + [D'(Y' - y') - D'(Y'' - y')]y + [D'(Z' - z') - D'(Z'' - z')]z - ([D'(X' - x') - D'(X'' - x')]x' + [D'(Y' - y') - D'(Y'' - y')]y' + [D'(Z' - z') - D'(Z'' - z')]z') = 0, \dots (3)$$

Man sieht, daß nur eine einzige Ebene den obigen Bedingungen Genüge leistet, vorausgesetzt, daß die drei Punkte unveränderlich bleiben. Die Coincidenz der Bilder bestimmt also vollkommen die Lage der Krystallebene, und das wünschen wir eben.

Indefs sind die Coordinaten  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  nicht ganz unveränderlich, da die Krystallebene einen gewissen Umfang hat, innerhalb dessen das Bild hin und her schwanken kann. Oft geschieht es, daß die vollkommenste Coincidenz der Bilder bei einer kleinen Bewegung des Auges gestört wird; um nun die Coincidenz der Bilder wieder herzustellen, dreht man den Krystall etwas; die erneuerte Coincidenz der Bilder wird bald zum zweiten Male durch eine kleine Bewegung des Auges gestört: und so ist man immer in Ungewissheit wo man aufhören soll, den Krystall zu stellen. Um diesem Uebel abzuhelpen, wählt man sehr kleine Krystallflächen, wodurch die Veränderlichkeit von  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  auf einen kleinen Raum beschränkt wird; zugleich nimmt man  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$



und  $X''$ ,  $Y''$ ,  $Z''$  sehr groß, das heißt die Gegenstände sehr entfernt, damit  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , die man überdies noch sehr klein machen kann, soviel als möglich dagegen verschwinden, wodurch die obige Gleichung unabhängig von  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  wird. Da indeß das gespiegelte Bild auf kleinen Krystallflächen im Verhältniß ihrer Kleinheit undeutlich (lichtschwach) wird, so wäre zu wünschen, die Gegenstände so wählen zu können, daß die Coincidenz der Bilder, ist sie einmal hervorgebracht, immer statt findet, das Bild mag auf einer oder auf der anderen Stelle der Krystallebene sich befinden, so daß man das Auge hin und her bewegen kann, ohne dabei die Coincidenz der Bilder auch nur im Geringsten zu stören.

Man setze also in der obigen Gleichung  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  veränderlich, doch so, daß sie immer in der Krystallebene bleiben, also

$$\begin{aligned} & [D''(X' - x') - D'(X'' - x')] x' + [D''(Y' - y') - D'(Y'' - y')] y' \\ & + [D''(Z' - z') - D'(Z'' - z')] z' = \text{Const.} \end{aligned}$$

Die Gleichung, die man auf diese Art erhält, ist leicht von  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  unabhängig zu machen; man braucht nur  $D' = D''$  zu setzen, wodurch sie folgende Gestalt erhält:

$$(X' - X'') x + (Y' - Y'') y + (Z' - Z'') z - \text{Const} = 0$$

$D'$ ,  $D''$  sind aber die Entfernungen der Gegenstände von dem Punkte, dessen Coordinaten  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  sind; in der Fig. 2.  $AC$  und  $BC$ .

Nachdem wir gelernt haben, die Gleichung einer Krystallebene aus der Coincidenz der Bilder zu bestimmen, denken wir uns diese Ebene um die Axe des Instruments, also um die Axe der  $y$ , so lange gedreht, bis die andere Krystallfläche genau in dieselbe Lage gekommen ist. Der Winkel, um den sich die Axe



des Instruments gedreht hat, sei  $\alpha$ : die Kenntniss dieses Winkels ist hinreichend, um die Gleichung der ersten Ebene in der neuen Lage zu finden, mithin auch den Winkel, den die beiden Ebenen miteinander machen, und den Zusammenhang zwischen dem Neigungswinkel der beiden Ebenen und dem Winkel  $\alpha$ . Die neue Gleichung der Ebene ist leicht aus der früheren (3) gefunden:  $y$  bleibt unverändert, für  $x$  setzt man  $x \cos \alpha + z \sin \alpha$  und für  $z$  setzt man  $z \cos \alpha - x \sin \alpha$  in die Gleichung (3).

Wir wollen in der Gleichung (3) den Coefficienten von  $x$  mit  $A$  bezeichnen, den Coefficienten von  $y$  mit  $B$ , den Coefficienten von  $z$  mit  $C$ . Eben so wollen wir in der neuen Gleichung  $A'$  den Coefficienten von  $x$ ,  $B'$  den Coefficienten von  $y$ ,  $C'$  den Coefficienten von  $z$  nennen. Der Winkel, den die beiden Ebenen machen, sei  $V$ , so ist bekanntlich

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)} \sqrt{(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}$$

Da nun

$$A = D''(X' - x') - D'(X'' - x')$$

$$B = D''(Y' - y') - D'(Y'' - y')$$

$$C = D''(Z' - z') - D'(Z'' - z')$$

und, wenn man in der Gleichung (3)  $y$  unverändert läßt,  $x \cos \alpha + z \sin \alpha$  für  $x$  und  $z \cos \alpha - x \sin \alpha$  für  $z$  setzt:

$$A' = [D''(X' - x') - D'(X'' - x')] \cos \alpha - [D''(Z' - z') - D'(Z'' - z')] \sin \alpha$$

$$B' = D''(Y' - y') - D'(Y'' - y')$$

$$C' = [D''(Z' - z') - D'(Z'' - z')] \cos \alpha + [D''(X' - x') - D'(X'' - x')] \sin \alpha$$

so ist

$$\cos V = \frac{(A^2 + C^2) \cos \alpha + B^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

E



Man sieht hieraus, dafs  $V = \alpha$  wird, wenn  $B = 0$ , oder wenn  $D'' (Y' - y') - D' (Y'' - y') = 0$ . Das geschieht, wenn entweder  $Y' - y' = Y'' - y' = 0$ , oder wenn zugleich  $D' = D''$  und  $Y' = Y''$ .

Die erste Bedingung, dafs  $y' = Y' = Y''$ , oder dafs der Krystall und die beiden Gegenstände in einer der Ebene des getheilten Kreises parallelen Ebene liegen, ist nicht immer leicht zu erfüllen. Wählt man aber die Gegenstände so, dafs sie senkrecht übereinander stehn, und der obere eben soviel über der Ebene der  $xy$  erhaben ist, als der untere unter derselben Ebene liegt, so wird die zweite Bedingung, dafs  $D' = D''$  und  $Y' = Y''$  sei, erfüllt, man möge das Goniometer stellen, wie man will, vorausgesetzt, dafs es senkrecht stehe. Wir werden diese Wahl der Gegenstände auch deshalb vorziehen, weil die Gleichheit der Entfernungen der Gegenstände zugleich, wie wir oben gesehen haben, hervorbringt, dafs die Coincidenz der Bilder in allen Punkten der Krystallebene statt findet, man also dann grofse Krystalle so gut anwenden kann, als kleine.

Wir haben stillschweigend angenommen, dafs sich die Coordinaten  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  von einer Krystallebene zur andern nicht ändern, das ist aber fast unmöglich hervorzubringen, man müfste denn die Krystallkante in den Mittelpunkt der Drehung bringen, was auch nicht leicht ist. Man nimmt deshalb lieber die Entfernungen der Gegenstände so grofs, dafs die Dimensionen des Gestelles, worauf der Krystall befestigt ist, ganz gegen dieselben verschwinden.

Es ergeben sich also folgende Vorsichtsmafsregeln, die bei der Anwendung des Wollastonschen Goniometers zu beobachten sind:



- I. Die Gegenstände, nach denen man visirt, müssen sehr weit entfernt seyn.
- II. Die Ebene des getheilten Kreises muß mit einer Linie, die man sich durch die beiden Gegenstände gelegt denken kann, parallel seyn.
- III. Der eine Gegenstand muß um eben so viel von dem Krystall entfernt seyn, als der andere (<sup>1</sup>). Alsdann ist es gleichgültig, ob der Krystall und die beiden Gegenstände in einer mit der Ebene des getheilten Kreises parallelen Ebene liegen oder nicht. Erlauben die Umstände die Wahl gleich entfernter Gegenstände nicht, so müssen Krystall und die beiden Gegenstände in einer mit der Ebene des getheilten Kreises parallelen Ebene liegen.
- IV. Man muß beide Krystallflächen dem Mittelpunkt der Drehung des getheilten Kreises so nahe als möglich bringen.
- V. Die Krystalle müssen sehr klein seyn.

Man erlaube mir noch einige Bemerkungen über IV. Man weiß aus dem Vorigen, daß die Krystallebene den Winkel, den zwei Linien von den Gegenständen nach dem Krystall gezogen miteinander machen, halbirt. Man kann sich also die Durchschnittslinie der Krystallebene mit der Ebene, in welcher die beiden Gegenstände und der Krystall liegen, als eine Tangente an eine Hyberbel denken, in deren beiden Brennpunkten die beiden Gegenstände liegen. Solcher Hyperbeln, deren Axe mit der Linie *AB* Fig. 2. zusammenfällt, und deren Brennpunkte *A* und *B* sind,

(<sup>1</sup>) Denkt man sich um den Krystall als Mittelpunkt eine Kugel beschrieben, so sind je zwei Gegenstände, die in derselben, mit der Ebene des Instruments parallelen Ebene und zugleich auf der Oberfläche der Kugel liegen, in der zu unserm Zweck schicklichen Lage.



kann man sich unendlich viele denken; in allen Punkten derselben werden, wenn man die Krystallebene mit den Tangenten an dieselben zusammenfallen läßt, die Bilder coincidiren. Man sieht leicht ein, daß diese Hyperbeln sehr wenig Krümmung haben, wenn die Gegenstände sehr weit entfernt sind, desto weniger, je größer die Entfernung ist, und je näher der Krystall einer Linie gebracht wird, die durch die Mitte von der Linie  $AB$  geht, und einen rechten Winkel mit derselben macht. Um je mehr man ferner die Krystallfläche drehen kann, ohne sie merklich aus dem Stück Hyperbelbogen, welches sie berührt, wenn die Coincidenz der Bilder in voller Schärfe statt findet, herauszubringen, desto mehr Spielraum haben die Fehler der Messung; je ähnlicher also das Stück Kreisbogen, in welchem sich der Krystall bei seiner Drehung bewegt, dem Stück Hyperbelbogen ist, oder je größer der Radius des Kreises ist, den der Krystall bei seiner Drehung beschreibt, desto schlimmer.

Ich habe Beobachtungen angestellt, die zeigen, wie groß ungefähr der Einfluß einer schlechten Centrirung des Krystalls auf den Werth der Beobachtung ist.

Ich habe erst zwei sehr nahe Gegenstände gewählt, nämlich die Rahmen eines Fensters, von dem ich mich in einer Entfernung von etwa sechs Fuß stellte. Der Winkel, den ich maß, war die Neigung zweier benachbarter Pyramidenflächen eines kleinen Bergkrystalls. Die Tafel  $A$  enthält die Beobachtungen bei schlechter Centrirung; bei den Beobachtungen, die  $B$  giebt, war die Kante des Krystalls dem Mittelpunkt der Drehung des Instruments sehr nahe.



*A.*

| I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       |
|----|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|
| 1  | 46° — 17' | 11 | 46° — 21' | 21 | 46° — 23' | 31 | 46° — 10' | 41 | 46° — 19' |
| 2  | - — 11    | 12 | - — 11    | 22 | - — 20    | 32 | - — 27    | 42 | - — 20    |
| 3  | - — 15    | 13 | - — 15    | 23 | - — 22    | 33 | - — 18    | 43 | - — 23    |
| 4  | - — 23    | 14 | - — 17    | 24 | - — 25    | 34 | - — 27    | 44 | - — 17    |
| 5  | - — 17    | 15 | - — 21    | 25 | - — 16    | 35 | - — 24    | 45 | - — 15    |
| 6  | - — 17    | 16 | - — 25    | 26 | - — 26    | 36 | - — 23    | 46 | - — 24    |
| 7  | - — 20    | 17 | - — 22    | 27 | - — 16    | 37 | - — 22    | 47 | - — 23    |
| 8  | - — 29    | 18 | - — 20    | 28 | - — 23    | 38 | - — 20    |    |           |
| 9  | - — 17    | 19 | - — 26    | 29 | - — 27    | 39 | - — 24    |    |           |
| 10 | - — 20    | 20 | - — 21    | 30 | - — 17    | 40 | - — 23    |    |           |

*B.*

| I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       |
|----|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|
| 1  | 46° — 13' | 11 | 46° — 10' | 21 | 46° — 10' | 31 | 46° — 11' | 41 | 46° — 14' |
| 2  | - — 13    | 12 | - — 10    | 22 | - — 16    | 32 | - — 14    | 42 | - — 18    |
| 3  | - — 11    | 13 | - — 12    | 23 | - — 13    | 33 | - — 6     | 43 | - — 17    |
| 4  | - — 12    | 14 | - — 13    | 24 | - — 19    | 34 | - — 17    | 44 | - — 12    |
| 5  | - — 12    | 15 | - — 13    | 25 | - — 17    | 35 | - — 12    | 45 | - — 12    |
| 6  | - — 9     | 16 | - — 16    | 26 | - — 20    | 36 | - — 12    | 46 | - — 14    |
| 7  | - — 16    | 17 | - — 13    | 27 | - — 13    | 37 | - — 15    | 47 | - — 16    |
| 8  | - — 14    | 18 | - — 16    | 28 | - — 15    | 38 | - — 17    |    |           |
| 9  | - — 9     | 19 | - — 19    | 29 | - — 19    | 39 | - — 13    |    |           |
| 10 | - — 19    | 20 | - — 15    | 30 | - — 13    | 40 | - — 21    |    |           |

Die Spalte I. giebt die Zahl der Beobachtungen, die Spalte II. die beobachteten Grade und Minuten oder die Differenzen der aufeinander folgenden Repetitionen. Das Instrument giebt das Complement des gemessenen Winkels zu 180°. Die Summe der beobachteten Winkel durch die Zahl der Beobachtungen dividirt, giebt in *A* 46° 20', 4, in *B* 46° 14', 0. Die Differenzen dieser



mittleren Resultate und der einzelnen Beobachtungen ins Quadrat erhoben, und die Summe genommen, giebt

$$\begin{array}{l} \text{für } A \quad 905,54 \\ \text{für } B \quad 477,00 \end{array}$$

Das Gewicht des Resultats, oder das Quadrat der Anzahl der Beobachtungen durch die doppelte Summe der Quadrate der Fehler dividirt, giebt

$$\begin{array}{l} \text{für } A \quad P = 1,22 \\ \text{für } B \quad P = 2,31 \end{array}$$

Das Resultat der Beobachtungen in  $B$  hat also ein größeres Gewicht, als das der Beobachtungen, die  $A$  giebt. Es werden ungefähr doppelt soviel Beobachtungen der Art, wie  $A$  sie enthält, erfordert, um dieselbe Genauigkeit zu erlangen, als die Beobachtungen in  $B$  haben.

Dafs der Einfluß einer schlechten Centrirung auf das Gewicht der Beobachtung unmerklich wird, wenn die Gegenstände sehr weit entfernt sind, beweisen die nachstehenden Beobachtungen. Die Tafel  $A$  giebt wieder die Beobachtungen bei schlechter Centrirung, die Tafel  $B$  die bei guter. Der gemessene Winkel war die Neigung zweier abwechselnder Quarzpyramidenflächen.

*A.*

| I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       |
|----|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|
| 1  | 85° — 49' | 10 | 85° — 47' | 19 | 85° — 47' | 28 | 85° — 43' | 37 | 85° — 48' |
| 2  | — — 48    | 11 | — — 48    | 20 | — — 43    | 29 | — — 46    | 38 | — — 46    |
| 3  | — — 43    | 12 | — — 46    | 21 | — — 49    | 30 | — — 47    | 39 | — — 45    |
| 4  | — — 47    | 13 | — — 52    | 22 | — — 48    | 31 | — — 47    | 40 | — — 45    |
| 5  | — — 50    | 14 | — — 50    | 23 | — — 49    | 32 | — — 45    | 41 | — — 41    |
| 6  | — — 48    | 15 | — — 43    | 24 | — — 45    | 33 | — — 48    | 42 | — — 51    |
| 7  | — — 42    | 16 | — — 42    | 25 | — — 48    | 34 | — — 50    |    |           |
| 8  | — — 45    | 17 | — — 46    | 26 | — — 51    | 35 | — — 48    |    |           |
| 9  | — — 53    | 18 | — — 49    | 27 | — — 46    | 36 | — — 44    |    |           |



*B.*

| I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       | I. | II.       |
|----|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|----|-----------|
| 1  | 85° — 46' | 10 | 85° — 46' | 19 | 85° — 41' | 28 | 85° — 41' | 37 | 85° — 44' |
| 2  | - — 44    | 11 | - — 42    | 20 | - — 42    | 29 | - — 47    | 38 | - — 49    |
| 3  | - — 44    | 12 | - — 42    | 21 | - — 44    | 30 | - — 50    | 39 | - — 46    |
| 4  | - — 46    | 13 | - — 44    | 22 | - — 47    | 31 | - — 47    | 40 | - — 44    |
| 5  | - — 45    | 14 | - — 46    | 23 | - — 48    | 32 | - — 44    | 41 | - — 45    |
| 6  | - — 49    | 15 | - — 40    | 24 | - — 42    | 33 | - — 44    | 42 | - — 49    |
| 7  | - — 44    | 16 | - — 41    | 25 | - — 45    | 34 | - — 45    |    |           |
| 8  | - — 44    | 17 | - — 48    | 26 | - — 49    | 35 | - — 49    |    |           |
| 9  | - — 48    | 18 | - — 49    | 27 | - — 48    | 36 | - — 43    |    |           |

Die Tafel *A* giebt den Winkel gleich 85° 46', 8, die Summe der Quadrate der Fehler ist 258, 16, also das Gewicht des Resultats der Beobachtungen

$$P = 3,416$$

Die Tafel *B* giebt den Winkel gleich 85° 45' 2; die Summe der Quadrate der Fehler ist 274, 28, also das Gewicht dieser Messung

$$P = 3,215$$

Der Unterschied dieser beiden *P* ist zu gering, als daß er einer andern Ursache als dem Zufall oder der Stimmung des Beobachters (der bei der zweiten Messung schon etwas ermüdet war) zugeschrieben werden kann, besonders da der Ueberschuß auf die entgegengesetzte Seite fällt, als man erwarten konnte.

Jetzt bleibt mir noch übrig, anzuzeigen, auf welche Art ich mich bemüht habe, die obigen Bedingungen einer guten Messung zu erfüllen.

Um die Ebene des getheilten Kreises der Linie, die man sich durch die beiden Gegenstände gelegt denken kann, parallel



zu machen, klebt man erst ein Stückchen Glas, dessen beide Oberflächen einander vollkommen parallel sind, auf das Gestelle, und bringt nun das Glas und das Instrument (das an seinem Fuße drei Schrauben haben muß) in eine solche Lage, daß die Coincidenz der Bilder auf beiden Oberflächen des Glases nach einander statt findet. Alsdann ist man gewiß, daß die Krystallflächen, die man nachher in dieselbe Lage bringt, einen rechten Winkel mit der Ebene des getheilten Kreises machen, und das ist eigentlich was man verlangt, und was den Parallelismus des getheilten Kreises mit einer durch die beiden Gegenstände gezogenen Linie zur nothwendigen Folge hat. Bequemer ist es, dieses viereckigte schwarze Glas, ohne Einfassung, um das gespiegelte Bild bis auf den Rand gehen lassen zu können, an der Axe des Gestelles zu befestigen, am besten mit einem kleinen Scharnier, um es einschlagen zu können, wenn es nicht mehr dient; siehe Fig. 3.

Ich habe immer zwei sehr entfernte Gegenstände gewählt, die in ziemlich gleicher Entfernung von mir standen. Da sich indeß solche Gegenstände nicht immer finden, am seltensten, wenn man will, daß es Horizontalstreifen seien, so habe ich zuweilen einen einzigen entfernten isolirten Gegenstand, z. B. eine Thurmspitze oder einen entfernten Schornstein, in einem vollkommen ebenen schwarzen Spiegel sich spiegeln lassen; dieses Bild im Spiegel war alsdann der untere Gegenstand, mit dem ich das auf der Krystallebene gespiegelte Bild des obern zusammenfallen liefs. Bei heiterm Wetter nahm ich zuweilen die Sonne zum Gegenstande, indem ich mein Auge durch ein schwarzes Glas vor der zu heftigen Einwirkung ihres Lichts sicherte.

Diese Methode gewährt den Vortheil, daß, wenn der Gegenstand sehr entfernt ist, und weder Gegenstand noch Krystall



sehr hoch über dem Spiegel stehen (<sup>1</sup>), der Unterschied der Entfernungen der Gegenstände sehr gering ist, und ganz verschwindet, wenn man die Sonne zum Gegenstande wählt. Dennoch ist das Gewicht der auf diese Art angestellten Beobachtungen geringer, vermuthlich weil das gespiegelte Bild auf einem hellen Grunde (dem abgespiegelten Himmel) liegt, dessen Blendung nicht erlaubt, die Coincidenz mit Schärfe zu beobachten.

Um auch den geringsten Einfluß des Unterschiedes der Entfernungen zu vernichten, bringt man den Gegenstand, sein gespiegeltes Bild und den Krystall so viel als möglich in eine mit der Ebene des getheilten Kreises parallele Ebene. Man stellt den Spiegel vermöge eines Niveau horizontal, bringt das Instrument vermöge des kleinen schwarzen viereckigen Glases in die gehörige Lage, legt allenfalls noch Pendel und Niveau an, und fixirt nun das Instrument so, daß es noch eine Drehung, deren Axe vertical steht, erlaubt, was man leicht dadurch erlangt, daß man es auf eine horizontale Ebene stellt. Nun ist es leicht, Krystalle und mehrere Gegenstände nacheinander, die sich in der Ferne zeigen, in eine mit der Ebene des getheilten Kreises parallele Ebene zu bringen, und dem Spiegel die erforderliche Lage zu geben. Die Umstände, die die Beobachtungen begleiten, erhalten eine große Mannigfaltigkeit, so daß selbst von den wenigen constanten Fehlern, die ungeachtet der getroffenen Mafsregeln noch übrig bleiben, eine

(<sup>1</sup>) Die Entfernung des Gegenstandes vom Krystall sei  $D$ , die Höhe desselben über der Ebene des Spiegels  $H'$ , die Höhe des Krystalls über derselben Ebene  $H$ , so ist offenbar die Differenz der Entfernung des Orts, wo der gespiegelte Gegenstand zu stehen scheint, und der Entfernung des Gegenstandes selbst vom Krystall gleich  $\sqrt{(D^2 + 4HH')} - D$ , also desto kleiner, je kleiner  $HH'$ . Dabei ist zu bemerken, daß immer  $H' > H$ , da die Spiegelung des Gegenstandes auf der Krystallebene nur dann möglich ist, wenn der Gegenstand über der Krystallebene erhaben ist.



gleichmäßige Vertheilung in positiver und negativer Richtung, demnach ihr Verschwinden durch zweckmäßige Combination der Beobachtungen zu erwarten ist.

Ich habe die Fehler, die durch eine schlechte Centration des Instruments, das heisst, wenn der Mittelpunkt der Drehung mit dem Mittelpunkt der Theilung nicht zusammenfällt, entstehen, mit Stillschweigen übergangen, weil sie durch Repetition der Winkel verschwinden. Indefs wäre es gut, eine doppelte Alidade anzubringen, so daß jede Repetition immer zwei Winkel giebt, deren halbe Summe der Winkel am Mittelpunkt der Drehung ist, den man zu wissen wünscht. Man muß wenigstens nicht eher aufhören zu repetiren, als bis die Alidade fast wieder auf demselben Punkt steht, von dem sie ausgegangen ist, also, wenn man vom Nullpunkt der Theilung ausgeht, bei  $m \cdot 360^\circ$ , wo  $m$  eine ganze Zahl ist.

Will man bloß ungefähr wissen, ob das Instrument gut centrirt ist, oder nicht, und wo ungefähr der Mittelpunkt der Theilung hinfällt, so braucht man nur eine große Anzahl von Beobachtungen in vier Abtheilungen zu bringen, je nachdem sie in den ersten, zweiten, dritten oder vierten rechten Winkel fallen. Die mittleren Werthe des gemessenen Winkels werden in verschiedenen Abtheilungen verschieden ausfallen, wenn das Instrument schlecht centrirt ist. Der Mittelpunkt der Drehung wird in denjenigen Quadranten des eingetheilten Kreises fallen, wo der gefundene mittlere Werth der kleinste ist.

### 3. Malus Goniometer.

Bei diesem Instrument wird die Richtung des reflectirten Strahls durch ein Fernrohr mit einem Fadenkreuz fixirt. Man



stellt das Instrument vermöge zweier Niveaux, die am Fuß desselben angebracht sind, horizontal, befestigt den Krystall in der Mitte des getheilten Kreises mit Wachs, so daß eine entfernte Verticallinie, z.B. die Kante eines Hauses, auf beiden Flächen, deren Neigungswinkel man wissen will, ein vollkommen verticales Bild giebt: man überzeugt sich davon durch den verticalen Faden im Fadenkreuze des Fernrohrs, welcher die Bilder auf beiden Flächen nacheinander decken muß; der Winkel, um den man den Krystall drehen muß, um diese Deckung auf beiden Flächen nacheinander hervorzubringen, ist das Complement des gesuchten Neigungswinkels der Flächen zu  $180^{\circ}$ .

Man sieht, daß dieses Instrument dem Wollastonschen außerordentlich ähnlich ist; der Unterschied ist, daß bei dem Wollastonschen Goniometer der reflectirte Strahl durch das Zusammenfallen mit einem Strahl, der von einem entfernten Gegenstand kommt, fixirt wird, hier hingegen durch ein Fernrohr mit einem Fadenkreuz, eine Methode, die eine größere Genauigkeit erlaubt, wie wir aus den Beobachtungen der zweiten Abtheilung sehen werden.

Die Theorie dieses Instruments ist also ganz dieselbe, als die des Wollastonschen Goniometers.

Weil es schwer ist hervorzubringen, daß die Bewegung der Alidade vollkommen parallel mit der Ebene der beiden Niveaux, welche man vermöge der letztern horizontal gestellt hat, geschehe; weil es ferner viel leichter ist, entfernte erhabene Gegenstände zu finden, als entfernte Gegenstände, die sich nicht über unsern Horizont erheben; endlich weil das Malus'sche Instrument, das ich besitze, ungeachtet der guten Theilung des Kreises, dennoch im Uebrigen bei weitem nicht so gut gearbeitet ist, als mein



Wollastonsches Goniometer, wie mir Beobachtungen unwider-  
sprechlich gezeigt haben; so habe ich mich stets des letztern be-  
dient, um die Messungen nach der Malus'schen Methode mit  
desto größerer Genauigkeit vollbringen zu können.

Ich schraube ein Fernrohr, das horizontale und verticale Be-  
wegung erlaubt, und ein Fadenkreuz hat, fest auf einen Tisch,  
richte es nach einem entfernten erhabenen Gegenstand, so daß  
das Fadenkreuz auf den Punkt trifft, nach dem ich visiren will;  
drehe nun das dem fernen Gegenstande zugewendete Ende in ver-  
ticaler Kreisbewegung niederwärts; stelle das Wollastonsche Go-  
niometer mit dem oben beschriebenen und in Fig. 3. abgebildeten  
viereckigen schwarzen Glase so vor demselben, daß die von dem  
Glase oder von dem auf dem Gestell ruhenden Krystall reflectir-  
ten Bilder deutlich zu sehen sind. Man sucht den getheilten Kreis  
des Goniometers mit der Ebene, die durch Krystall, Fernrohr und  
Gegenstand geht, so viel als möglich parallel zu stellen, und bringt  
ihn nun in eine solche Lage, daß der auf der einen Oberfläche  
des viereckigen Glases abgespiegelte und genau in das Fadenkreuz  
fallende Gegenstand sich eben so auf der entgegengesetzten Ober-  
fläche des Glases verhält, wenn man den getheilten Kreis um  $180^\circ$   
gedreht hat. Nun klebt man den Krystall aufs Gestell, ohne Fern-  
rohr und Goniometer, im geringsten zu bewegen, giebt ihm eine  
solche Lage, daß die auf beiden Flächen nacheinander gespiegelten  
Bilder ins Fadenkreuz fallen, und fängt nun die Messung an.

~~~~~  
Horizonte erheben; endlich weil das Malus'sche Instrument, das
ich besitze, ungeachtet der guten Theilung des Kreises, dennoch
im Uebigen bei weitem nicht so gut gezeichnet ist, als mein

Gegenstände: Die Spitze und die Mitte der Basis eines hohen Thurms.

die Beobachtungen enthaltend.

Zweite Abtheilung, die Beobachtungen enthaltend.

Der Krystall, den ich den Messungen unterwarf, war ein kleiner Gottharder von etwa sechs Millimeter Durchmesser. Von den Flächen der sechsseitigen Pyramide reflectirten drei untereinander benachbarte sehr deutlich, die vierte fehlte, die fünfte reflectirte wieder sehr gut, war aber nicht ganz; die sechste war sehr klein. Wir wollen diese Flächen der Reihe nach mit No. 1, No. 2, No. 3, No. 5 und No. 6. bezeichnen. Die nachstehenden Tabellen, welche meine Beobachtungen enthalten, geben alle das Complement des gesuchten Winkels zu 180° . Jede Tabelle enthält eine Messung; die Spalte I. enthält die Zahl der Repetitionen, die Spalte II. die Winkel, die die einzelnen Repetitionen gaben, oder die Differenzen der aufeinander folgenden Repetitionen. Das Resultat der ganzen Messung, welches erhalten wird, indem man die Summe der Beobachtungen durch ihre Anzahl dividirt, steht am Ende jeder Tabelle. Die Summe der Quadrate der Fehler oder der Differenzen jeder einzelnen Beobachtung und des Resultats der Messung ist mit E bezeichnet, das Gewicht des Resultats mit P .

A. Winkel zweier benachbarter Pyramidenflächen. (A)

1. Neigungswinkel von No. 1 und No. 2.

a) Instrument: Wollastonsches Goniometer.

Gegenstände: Die Spitze und die Mitte der Basis eines hohen Thurms.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° — 20'	8	46° — 21'	15	46° — 14'	22	46° — 14'	29	46° — 14'
2	— — 17	9	— — 16	16	— — 16	23	— — 12	30	— — 19
3	— — 14	10	— — 16	17	— — 13	24	— — 15	31	— — 18
4	— — 18	11	— — 15	18	— — 15	25	— — 19	32	— — 17
5	— — 13	12	— — 12	19	— — 16	26	— — 15		
6	— — 18	13	— — 13	20	— — 14	27	— — 13		1480° — 13'
7	— — 12	14	— — 13	21	— — 14	28	— — 17		

46° — 15, 4

$E = 183,72$; $\log P = 0,44511$; $P = 2,786$

b) Instrument: Wollaston's Goniometer.

Gegenstände: Zwei übereinander liegende horizontale Streifen eines gegenüberliegenden Hauses.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° — 12'	17	46° — 12'	33	46° — 14'	49	46° — 11'	65	46° — 16'
2	- — 12	18	- — 13	34	- — 13	50	- — 13	66	- — 11
3	- — 11	19	- — 14	35	- — 8	51	- — 15	67	- — 10
4	- — 9	20	- — 11	36	- — 10	52	- — 12	68	- — 12
5	- — 11	21	- — 10	37	- — 9	53	- — 10	69	- — 10
6	- — 5	22	- — 9	38	- — 10	54	- — 10	70	- — 14
7	- — 15	23	- — 11	39	- — 13	55	- — 11	71	- — 15
8	- — 13	24	- — 12	40	- — 14	56	- — 10	72	- — 13
9	- — 11	25	- — 14	41	- — 14	57	- — 15	73	- — 15
10	- — 9	26	- — 12	42	- — 11	58	- — 13	74	- — 9
11	- — 14	27	- — 12	43	- — 9	59	- — 13	75	- — 8
12	- — 12	28	- — 12	44	- — 12	60	- — 14	76	- — 11
13	- — 11	29	- — 13	45	- — 13	61	- — 11	77	- — 11
14	- — 10	30	- — 9	46	- — 11	62	- — 13	78	- — 16
15	- — 13	31	- — 12	47	- — 16	63	- — 14	3603° — 30	
16	- — 12	32	- — 14	48	- — 13	64	- — 14		

46° — 11',9

$E = 343,58$; $\log P = 0,94713$; $P = 8,854$

c) Instrument: Wollaston's Goniometer.

Gegenstände: Zwei Schornsteine von zwei ungleich entfernten Häusern, die übereinander standen, der eine oberhalb, der andere unterhalb des Horizontes des Beobachters. Eine Linie durch dieselben gezogen, war nicht vollkommen parallel mit der Ebene des getheilten Kreises.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° - 15'	10	46° - 11'	19	46° - 14'	28	46° - 11'	37	46° - 11'
2	- - 13	11	- - 15	20	- - 11	29	- - 14	38	- - 11
3	- - 14	12	- - 12	21	- - 12	30	- - 17	39	- - 16
4	- - 14	13	- - 13	22	- - 14	31	- - 11	1802° - 57'	
5	- - 11	14	- - 13	23	- - 15	32	- - 19		
6	- - 12	15	- - 16	24	- - 16	33	- - 13		
7	- - 15	16	- - 13	25	- - 15	34	- - 12		
8	- - 17	17	- - 12	26	- - 12	35	- - 15		
9	- - 14	18	- - 22	27	- - 13	36	- - 13		

$$46^\circ - 13', 7$$

$$E = 217, 1; \log P = 0, 54444; P = 3, 503$$

d) Instrument: Wollaston's Goniometer und Horizontalspiegel.

Gegenstand: Ein erhabener entfernter Schornstein.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° - 19'	10	46° - 15'	19	46° - 14'	28	46° - 16'	37	46° - 13'
2	- - 17	11	- - 22	20	- - 13	29	- - 12	38	- - 15
3	- - 15	12	- - 13	21	- - 12	30	- - 13	39	- - 17
4	- - 16	13	- - 13	22	- - 15	31	- - 15	1803° - 50'	
5	- - 14	14	- - 13	23	- - 17	32	- - 20		
6	- - 14	15	- - 16	24	- - 15	33	- - 18		
7	- - 15	16	- - 12	25	- - 17	34	- - 14		
8	- - 17	17	- - 15	26	- - 17	35	- - 11		
9	- - 15	18	- - 16	27	- - 15	36	- - 14		

$$46^\circ - 15', 1$$

$$E = 198, 39; \log P = 0, 58358; P = 3, 833$$

e) Instrument und Gegenstand wie in d).

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° - 14'	10	46° - 14'	19	46° - 15'	28	46° - 15'	37	46° - 10'
2	- - 14	11	- - 16	20	- - 16	29	- - 11	38	- - 17
3	- - 15	12	- - 14	21	- - 12	30	- - 15	39	- - 18
4	- - 14	13	- - 13	22	- - 17	31	- - 14	1803° - 45'	
5	- - 13	14	- - 15	23	- - 15	32	- - 16		
6	- - 11	15	- - 16	24	- - 20	33	- - 19		
7	- - 16	16	- - 18	25	- - 18	34	- - 16		
8	- - 15	17	- - 17	26	- - 16	35	- - 10		
9	- - 15	18	- - 16	27	- - 14	36	- - 15		
46° - 15', 0									
$E = 194,0$; $\log P = 0,59330$; $P = 3,920$									

f) Instrument und Gegenstände wie in c)

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° - 18'	10	46° - 15'	19	46° - 17'	28	46° - 13'	37	46° - 14'
2	- - 14	11	- - 14	20	- - 13	29	- - 11	38	- - 17
3	- - 13	12	- - 14	21	- - 13	30	- - 12	39	- - 16
4	- - 13	13	- - 11	22	- - 13	31	- - 11	1803° - 3'	
5	- - 9	14	- - 13	23	- - 13	32	- - 19		
6	- - 14	15	- - 16	24	- - 5	33	- - 13		
7	- - 14	16	- - 15	25	- - 22	34	- - 17		
8	- - 15	17	- - 15	26	- - 14	35	- - 16		
9	- - 14	18	- - 13	27	- - 13	36	- - 11		
46° - 13', 9									
$E = 284,8$; $\log P = 0,42656$; $P = 2,670$									

Man sieht aus den Beobachtungen a) d) und c), bei denen man das Instrument mit großer Sorgfalt gestellt hat, um einen constanten Fehler zu vermeiden, daß der Winkel nicht weit von

$46^{\circ} 15', 1$ entfernt seyn kann. Man wird aus den obigen Formeln finden, daß die Probabilität, der Fehler dieses Resultats sei in den Grenzen $\mp 0', 5$ enthalten, außerordentlich groß ist; deshalb muß die Beobachtung *b*), bei der man etwa 50000 gegen 1 wetten kann, daß ihr Beobachtungsfehler die Grenzen $\mp 1'$ nicht übersteige, einen bedeutenden constanten Fehler enthalten und ist zu verwerfen.

Von den Beobachtungen *c*) und *f*) wissen wir, daß sie einen constanten Fehler enthalten, da das Instrument bei denselben nicht richtig gestellt war; sie stimmen so genau mit einander überein, daß man diesen constanten Fehler sehr nahe aus ihnen bestimmen kann, indem man ihr mittleres Resultat von dem obigen Resultat abzieht; man bekommt so $1', 3$. Corrigirt man die beiden Beobachtungen um diesen Fehler, und stellt sie mit den drei obigen Beobachtungen zusammen, so bekommt man folgende fünf Werthe des gesuchten Winkels

$$46^{\circ} - 15', 4 \text{ dessen } P = 2, 786$$

$$46^{\circ} - 15', 0 \text{ dessen } P = 3, 503$$

$$46^{\circ} - 15', 1 \text{ dessen } P = 3, 833$$

$$46^{\circ} - 15', 0 \text{ dessen } P = 3, 920$$

$$46^{\circ} - 15', 2 \text{ dessen } P = 2, 670$$

Multipliziert man, nach der in der ersten Abtheilung angegebenen Methode, jeden Werth mit seinem Gewicht, und dividirt die Summe dieser Producte durch die Summe der Gewichte, so bekommt man

$$46^{\circ} - 15', 12$$

als den genauesten Werth des Winkels. Man erhält ebenfalls nach den obigen Formeln das Gewicht dieses Werthes, wenn man die

$$\log P' = 2,09205$$
$$P' = 123,61$$

$$P' = 123,61$$

2. Neigungswinkel von No. 2 und No. 3.

a) Instrument: Wollaston's Goniometer.

Gegenstände: Zwei Horizontalstreifen an einem gegenüberliegenden Hause.

$$E = 223,00; \quad \log P = 0,53280; \quad P = 3,410$$

$46^{\circ} - 17', 0$

$$E = 223,00; \quad \log P = 0,53280; \quad P = 3,410$$

b) Instrument: Wollaston's Goniometer.

Gegenstände: Zwei Schornsteine, die senkrecht übereinander standen.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° - 20'	10	46° - 16'	19	46° - 16'	28	46° - 17'	37	46° - 17'
2	- - 17	11	- - 16	20	- - 14	29	- - 13	38	- - 18
3	- - 15	12	- - 12	21	- - 14	30	- - 19	39	- - 15
4	- - 16	13	- - 16	22	- - 18	31	- - 19	1804° - 40'	
5	- - 12	14	- - 15	23	- - 14	32	- - 19		
6	- - 15	15	- - 18	24	- - 18	33	- - 15		
7	- - 17	16	- - 19	25	- - 13	34	- - 17		
8	- - 19	17	- - 19	26	- - 19	35	- - 15		
9	- - 17	18	- - 17	27	- - 17	36	- - 17		

$46^{\circ} - 16', 4$
 $E = 164, 64; \log P = 0, 66457; P = 4, 619$

c) Instrument: Wollaston's Goniometer, mit Horizontalspiegel.

Gegenstand: Ein erhabener entfernter Schornstein.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° - 19'	10	49° - 17'	19	46° - 17'	28	46° - 15'	37	46° - 16'
2	- - 18	11	- - 15	20	- - 18	29	- - 12	38	- - 19
3	- - 15	12	- - 18	21	- - 13	30	- - 20	39	- - 21
4	- - 22	13	- - 15	22	- - 17	31	- - 16	1805° - 4'	
5	- - 14	14	- - 17	23	- - 12	32	- - 18		
6	- - 15	15	- - 20	24	- - 18	33	- - 17		
7	- - 16	16	- - 19	25	- - 18	34	- - 17		
8	- - 21	17	- - 17	26	- - 21	35	- - 20		
9	- - 18	18	- - 17	27	- - 14	36	- - 12		

$46^{\circ} - 17', 0$
 $E = 251, 00; \log P = 0, 48143; P = 3, 030$

Diese Beobachtungen stimmen nicht so schön miteinander überein, als die vorigen, doch ist keine von ihnen grade zu verwerfen. Combinirt man diese fünf Werthe, welche zusammengestellt folgende sind:

$$\begin{aligned} 46^{\circ} - 17', 0 & \text{ dessen } P = 3,410 \\ 46^{\circ} - 16', 4 & \text{ dessen } P = 4,619 \\ 46^{\circ} - 17', 0 & \text{ dessen } P = 3,030 \\ 46^{\circ} - 16', 0 & \text{ dessen } P = 2,050 \\ 46^{\circ} - 16', 0 & \text{ dessen } P = 12,675 \end{aligned}$$

auf die obige Art, so erhält man als den genauesten Werth des Winkels

$$46^{\circ} - 16', 32$$

dessen Gewicht

$$\begin{aligned} \log P' &= 1,12974 \\ P' &= 13,482 \end{aligned}$$

Man kann also ungefähr 100 gegen 1 wetten, daß der Fehler dieses Resultats in den Grenzen $\mp 0', 5$ bleibt. Man sieht hieraus, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß der Neigungswinkel von No. 1 und No. 2. von dem von No. 2 und No. 3. etwas verschieden ist.

3. Neigungswinkel von No. 5 und No. 6.

Instrument und Gegenstand wie in 2. e)

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$46^{\circ} - 17'$	9	$46^{\circ} - 19'$	17	$46^{\circ} - 17'$	25	$46^{\circ} - 17'$	33	$46^{\circ} - 19'$
2	- - 18	10	- - 18	18	- - 17	26	- - 16	34	- - 19
3	- - 15	11	- - 17	19	- - 17	27	- - 16	35	- - 16
4	- - 16	12	- - 12	20	- - 13	28	- - 17	36	- - 13
5	- - 15	13	- - 16	21	- - 14	29	- - 13	37	- - 15
6	- - 16	14	- - 14	22	- - 17	30	- - 18	38	- - 17
7	- - 18	15	- - 17	23	- - 16	31	- - 17	39	- - 18
8	- - 18	16	- - 18	24	- - 17	32	- - 15		
$46^{\circ} - 16', 3$									
$E = 117, 11; \log P = 0, 81250; P = 6, 494$									
									$1804^{\circ} - 38'$

4. Neigungswinkel von No. 6 und No. 1.

Instrument und Gegenstand wie in 2. e)

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° — 18'	10	46° — 19'	19	46° — 17'	28	46° — 18'	37	46° — 15'
2	- — 18	11	- — 15	20	- — 16	29	- — 15	38	- — 19
3	- — 15	12	- — 17	21	- — 17	30	- — 18	39	- — 20
4	- — 17	13	- — 15	22	- — 16	31	- — 18	1805° — 17'	
5	- — 16	14	- — 19	23	- — 18	32	- — 18		
6	- — 15	15	- — 17	24	- — 20	33	- — 18		
7	- — 17	16	- — 20	25	- — 17	34	- — 18		
8	- — 18	17	- — 18	26	- — 18	35	- — 18		
9	- — 17	18	- — 19	27	- — 17	36	- — 16		

46° — 17', 3

$E = 79, 11$; $\log P = 0,98286$; $P = 9,613$

B. Winkel zweier abwechselnder Pyramidenflächen. (A')

1. Neigung von No. 1 und No. 3.

a) Instrument: Wollaston's Goniometer.

Gegenstände: Zwei übereinander liegende Horizontalstreifen eines gegenüber liegenden Hauses.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	85° — 44'	10	85° — 47'	19	85° — 45'	28	85° — 41'	37	85° — 44'
2	- — 43	11	- — 46	20	- — 45	29	- — 46	38	- — 46
3	- — 40	12	- — 47	21	- — 46	30	- — 49	39	- — 47
4	- — 44	13	- — 45	22	- — 46	31	- — 48	40	- — 44
5	- — 47	14	- — 42	23	- — 44	32	- — 44	41	- — 43
6	- — 43	15	- — 44	24	- — 43	33	- — 47	42	- — 42
7	- — 44	16	- — 46	25	- — 47	34	- — 50	3601° — 33'	
8	- — 42	17	- — 44	26	- — 48	35	- — 48		
9	- — 47	18	- — 46	27	- — 46	36	- — 43		

85° — 45', 0

$E = 201,00$; $\log P = 0,64227$; $P = 4,388$

b) Instrument und Gegenstand wie in A. 1. c)

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	85° — 47'	10	85° — 44'	19	85° — 43'	28	85° — 42'	37	85° — 43'
2	- — 44	11	- — 42	20	- — 46	29	- — 42	38	- — 46
3	- — 44	12	- — 46	21	- — 46	30	- — 47	39	- — 46
4	- — 44	13	- — 46	22	- — 45	31	- — 42	40	- — 39
5	- — 44	14	- — 44	23	- — 43	32	- — 44	41	- — 42
6	- — 44	15	- — 40	24	- — 39	33	- — 42	42	- — 44
7	- — 43	16	- — 41	25	- — 44	34	- — 44	3600° — 34'	
8	- — 44	17	- — 45	26	- — 47	35	- — 43		
9	- — 44	18	- — 42	27	- — 43	36	- — 44		

$85^\circ - 43',6$

$E = 157,52; \log P = 0,74813; P = 5,599$

c) Instrument: Wollaston's Goniometer mit Horizontalspiegel.

Gegenstand: Ein erhabener entfernter Schornstein.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	85° — 46'	10	85° — 46'	19	85° — 41'	28	85° — 41'	37	85° — 44'
2	- — 44	11	- — 42	20	- — 42	29	- — 47	38	- — 49
3	- — 44	12	- — 42	21	- — 44	30	- — 50	39	- — 46
4	- — 46	13	- — 44	22	- — 47	31	- — 47	40	- — 44
5	- — 45	14	- — 46	23	- — 48	32	- — 44	41	- — 45
6	- — 49	15	- — 40	24	- — 42	33	- — 44	42	- — 49
7	- — 44	16	- — 41	25	- — 45	34	- — 45	3601° — 41'	
8	- — 44	17	- — 48	26	- — 49	35	- — 49		
9	- — 48	18	- — 49	27	- — 48	36	- — 43		

$85^\circ - 45',2$

$E = 274,28; \log P = 0,50727; P = 3,215$

d) Instrument: Wollaston's Goniometer mit Fernrohr und Fadenkreuz, und einem Gegenstande, nach der Malus'schen Methode.

Gegenstand: Der mittlere von drei Schornsteinen, deren Spitzen in einer horizontalen Linie standen.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	85° — 47'	10	85° — 46'	19	85° — 44'	28	85° — 42'	37	85° — 42'
2	- — 43	11	- — 43	20	- — 43	29	- — 44	38	- — 47
3	- — 42	12	- — 42	21	- — 44	30	- — 48	39	- — 47
4	- — 45	13	- — 46	22	- — 47	31	- — 43	40	- — 42
5	- — 46	14	- — 45	23	- — 44	32	- — 43	41	- — 43
6	- — 45	15	- — 44	24	- — 41	33	- — 44	42	- — 46
7	- — 43	16	- — 43	25	- — 45	34	- — 45	3601° — 6'	
8	- — 43	17	- — 47	26	- — 47	35	- — 46		
9	- — 46	18	- — 46	27	- — 44	36	- — 43		

85° — 44', 4

$E = 134, 32 ; \log P = 0, 81733 ; P = 6, 567$

Von dem Winkel *b*) wissen wir (s. die Bemerkungen zu *A*) dafs er um 1', 3 falsch ist. Corrigiren wir ihn, so haben wir folgende vier Werthe des gemessenen Winkels

$$85^\circ - 45', 0 \text{ dessen } P = 4, 388$$

$$85^\circ - 44', 9 \text{ dessen } P = 5, 599$$

$$85^\circ - 45', 2 \text{ dessen } P = 3, 215$$

$$85^\circ - 44', 4 \text{ dessen } P = 6, 567;$$

diese nach den angegebenen Formeln combinirt, geben

$$85^\circ - 44, 80$$

dessen Gewicht

$$\log P' = 1, 59330$$

$$P' = 39, 201$$

2. Neigung von No. 5 zu No. 1.

Instrument: Wollaston's Goniometer mit dem Horizontalspiegel.

Gegenstand: Ein erhabener entfernter Schornstein.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	85° — 48'	10	85° — 49'	19	85° — 38'	28	85° — 44'	37	85° — 45'
2	- - - 45	11	- - - 42	20	- - - 42	29	- - - 48	38	- - - 44
3	- - - 43	12	- - - 44	21	- - - 47	30	- - - 46	39	- - - 45
4	- - - 42	13	- - - 52	22	- - - 49	31	- - - 50	40	- - - 44
5	- - - 48	14	- - - 45	23	- - - 49	32	- - - 41	41	- - - 39
6	- - - 51	15	- - - 45	24	- - - 38	33	- - - 45	42	- - - 50
7	- - - 44	16	- - - 45	25	- - - 45	34	- - - 46	3601° — 47'	
8	- - - 46	17	- - - 49	26	- - - 49	35	- - - 48		
9	- - - 45	18	- - - 47	27	- - - 39	36	- - - 46		
85° — 45', 4									
$E = 478, 12$; $\log P = 0, 26594$; $P = 1, 845$									

3. Neigung von No. 3 und No. 5.

Instrument: Wollaston's Goniometer, mit Fernrohr und Fadenkreuz.

Gegenstand: Der mittlere von drei Schornsteinen, deren Spitzen in einer horizontalen Linie lagen.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	85° — 48'	10	85° — 46'	19	85° — 44'	28	85° — 53'	37	85° — 44'
2	- — 46	11	- — 43	20	- — 45	29	- — 45	38	- — 46
3	- — 43	12	- — 45	21	- — 46	30	- — 49	39	- — 47
4	- — 46	13	- — 48	22	- — 47	31	- — 46	40	- — 44
5	- — 48	14	- — 47	23	- — 45	32	- — 44	41	- — 43
6	- — 46	15	- — 45	24	- — 43	33	- — 45	42	- — 47
7	- — 43	16	- — 43	25	- — 46	34	- — 49	3602° — 7'	
8	- — 45	17	- — 47	26	- — 48	35	- — 46		
9	- — 48	18	- — 48	27	- — 45	36	- — 45		
85° — 45', 8									
$E = 174, 68$; $\log P = 0, 70321$; $P = 5, 049$									

4. Neigung von No. 6 und No. 2.

Instrument und Gegenstand wie der vorige.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	85° — 49'	10	85° — 47'	19	85° — 45'	28	85° — 42'	37	85° — 45'
2	— — 44	11	— — 45	20	— — 44	29	— — 45	38	— — 46
3	— — 44	12	— — 45	21	— — 46	30	— — 49	39	— — 48
4	— — 45	13	— — 47	22	— — 48	31	— — 46	40	— — 45
5	— — 48	14	— — 46	23	— — 46	32	— — 43	41	— — 43
6	— — 47	15	— — 44	24	— — 43	33	— — 45	42	— — 47
7	— — 43	16	— — 44	25	— — 46	34	— — 48		
8	— — 46	17	— — 48	26	— — 48	35	— — 47		
9	— — 47	18	— — 49	27	— — 47	36	— — 45		
				85° — 45', 8					
				$E = 137, 88$; $\log P = 0, 80598$; $P = 6, 397$					

C. Neigungswinkel zweier gegenüberliegender Pyramidenflächen, oder doppelter Neigungswinkel der Pyramidenfläche gegen die Axe (I).

1. Neigungswinkel von No. 2 gegen No. 5.

a) Instrument: Wollaston's Goniometer.

Gegenstand: Zwei Schornsteine, die senkrecht übereinander standen, der eine oberhalb, der andere unterhalb dem Horizont des Beobachters, in ungleicher Entfernung.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	103° — 39'	10	103° — 32'	19	103° — 38'	28	103° — 37'	37	103° — 32'
2	- — 32	11	- — 37	20	- — 31	29	- — 35	38	- — 32
3	- — 36	12	- — 33	21	- — 35	30	- — 33	39	- — 40
4	- — 35	13	- — 34	22	- — 35	31	- — 34	40	- — 35
5	- — 35	14	- — 36	23	- — 34	32	- — 39	41	- — 34
6	- — 33	15	- — 36	24	- — 34	33	- — 37	42	- — 36
7	- — 37	16	- — 30	25	- — 38	34	- — 32	4350° — 31'	
8	- — 35	17	- — 34	26	- — 36	35	- — 38		
9	- — 36	18	- — 37	27	- — 33	36	- — 36		
103° — 35', 0									
$E = 219,00$; $\log P = 0,60503$; $P = 4,028$									

b) Instrument und Gegenstand wie B. 3.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	103° - 37'	7	103° - 36'	13	103° - 33'	19	103° - 33'
2	- - 34	8	- - 37	14	- - 36	20	- - 33
3	- - 32	9	- - 33	15	- - 36	21	- - 36
4	- - 37	10	- - 34	16	- - 34	2175° - 8'	
5	- - 35	11	- - 37	17	- - 33		
6	- - 31	12	- - 34	18	- - 37		
103° - 34', 6							
E = 70,76 ; log P = 0,49360 ; P = 3,116							

Diese beiden Werthe

$$103^\circ - 35', 0 \text{ dessen } P = 4,028$$

$$103^\circ - 34', 6 \text{ dessen } P = 3,116$$

combinirt, geben

$$103^\circ - 34', 82$$

dessen Gewicht

$$\log. P' = 1,40476$$

$$P' = 25,396$$

2. Neigungswinkel von No. 3 und No. 6.

Instrument und Gegenstand wie beim Vorigen.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	103° - 38'	10	103° - 34'	19	103° - 36'	28	103° - 37'	37	103° - 33'
2	- - 34	11	- - 38	20	- - 33	29	- - 37	38	- - 35
3	- - 34	12	- - 36	21	- - 37	30	- - 34	39	- - 39
4	- - 38	13	- - 33	22	- - 38	31	- - 35	40	- - 34
5	- - 35	14	- - 37	23	- - 34	32	- - 37	41	- - 34
6	- - 34	15	- - 38	24	- - 33	33	- - 36	42	- - 38
7	- - 37	16	- - 36	25	- - 38	34	- - 34	4350° - 57'	
8	- - 37	17	- - 33	26	- - 35	35	- - 37		
9	- - 33	18	- - 37	27	- - 34	36	- - 37		
103° - 35', 6									
$E = 139,72$; $\log P = 0,80020$; $P = 6,313$									

E n d r e s u l t a t.

Aus dem Vorigen haben wir folgende vier Werthe des Neigungswinkels zweier benachbarter Pyramidenflächen

$$46^{\circ} - 15', 12 \text{ dessen } P = 123, 611$$

$$46^{\circ} - 16', 32 \text{ dessen } P = 13, 482$$

$$46^{\circ} - 16', 35 \text{ dessen } P = 6, 494$$

$$46^{\circ} - 17', 35 \text{ dessen } P = 9, 613$$

Diese combinirt, geben als den genauesten Werth des Winkels

$$46^{\circ} - 15', 41$$

und dessen Gewicht

$$\log P = 0, 6836773$$

$$P = 4, 827$$

Der Neigungswinkel zweier abwechselnder Pyramidenflächen wurde gefunden

$$85^{\circ} - 44', 8 \text{ dessen } P = 39, 201$$

$$85^{\circ} - 45', 4 \text{ dessen } P = 1, 845$$

$$85^{\circ} - 45', 8 \text{ dessen } P = 5, 049$$

$$85^{\circ} - 45', 8 \text{ dessen } P = 6, 397$$

Der hieraus hervorgehende genaueste Werth derselben ist

$$85^{\circ} - 45', 04$$

$$\log P = 1, 0606978$$

$$P = 11, 500$$

Die beiden Werthe des Neigungswinkels zweier gegenüberliegender Pyramidenflächen

$$103^{\circ} - 34', 82 \text{ dessen } P = 25, 396$$

$$103^{\circ} - 35', 60 \text{ dessen } P = 6, 313$$

geben combinirt

$$103^{\circ} - 34', 97$$

dessen Gewicht

$$\log P = 1,0130901$$

$$P = 10,306$$

Berechnet man aus den zwei letzten Neigungen die erste, und multiplicirt die erhaltenen drei Werthe von A mit den Quadraten ihrer Differentialcoefficienten und mit ihren Gewichten, so bekommt man folgende Tafel, in welcher für die obigen Winkel ihre Complementary zu 180° gesetzt sind

$$1 \cdot 4,827 \cdot 8024',59 = 1 \cdot 4,827 \cdot A$$

$$(2,1739)^2 \cdot 11,500 \cdot 8024,30 = (2,1739)^2 \cdot 11,500 \cdot A$$

$$(2,9735)^2 \cdot 10,306 \cdot 8024,02 = (2,9735)^2 \cdot 10,306 \cdot A$$

Diese Gleichungen zusammenaddirt geben eine Endgleichung, aus welcher man findet

$$A = 133^\circ - 44',14$$

$$\log P = 1,7870774$$

$$P = 61,246$$

Hiernach sind die der Wahrheit am nächsten kommenden Werthe der Krystallwinkel des Quarzes folgende:

Neigung zweier benachbarter Flächen

der sechsseitigen Pyramide $133^\circ - 44' - 8'',4$

Ebener Winkel an der Spitze $39^\circ - 18' - 39'',2$

Neigung der Pyramidenfläche gegen

die Axe $38^\circ - 13' - 2'',4$

Neigung der Pyramidenkante gegen

die Axe $42^\circ - 16' - 40'',4$

Werth der Pyramidenspitze $41^{\circ} - 12' - 25'', 2$ ⁽¹⁾

Volumen der Doppelpyramide, die
halbe Axe = 1 gesetzt 1,43187

Oberfläche der Doppelpyramide, die
halbe Axe = 1 gesetzt 8,3993

Nimmt man das Rhomboëder, das von den drei abwechselnden Pyramidenflächen gebildet wird, als die Grundform des Quarzes an, so ist:

Neigungswinkel zweier abwechselnder Pyramidenflächen, oder Endkantenwinkel
des Quarzrhomboëders $94^{\circ} - 14' - 50'', 6$

Ebener Winkel an der Spitze des Rhomboëders. $93^{\circ} - 57' - 14'', 6$

Neigung der Rhomboëderfläche gegen die Axe $38^{\circ} - 13' - 2'', 4$

Neigung der Rhomboëderkante gegen die Axe $57^{\circ} - 35' - 5'', 3$

Werth der Rhomboëderspitze. $51^{\circ} - 22' - 10'', 7$

Volumen des Rhomboëders, halbe Axe = 1 1,90916

Oberfläche des Rhomboëders 9,21560

(¹) Denkt man sich die Spitze der Pyramide in den Mittelpunkt einer Kugel gestellt, so dafs die Flächen derselben auf der Oberfläche der Kugel ein sphärisches Sechseck abschneiden, so ist nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie, der man leicht eine allgemeine Form geben kann, die Oberfläche des sphärischen Sechsecks = $\frac{nA - (n-2) 180^{\circ}}{2}$, die ganze Oberfläche der Kugel = 360° gesetzt. A ist der Winkel des sphärischen Dreiecks, n die Zahl seiner Seiten. Das Verhältnifs der Oberfläche dieses Sechsecks zur ganzen Oberfläche der Kugel ist offenbar dasselbe, als wenn man den Raum, den die Spitze im Mittelpunkt der Kugel einnimmt, mit dem ganzen Raum, der um den Mittelpunkt der Kugel her verbreitet ist, vergleicht. Den Raum, den die Spitze einnimmt, habe ich den Werth der Spitze genannt, die Summe aller soliden Winkel, die man sich um den Mittelpunkt her gelegt denken kann, habe ich gleich 360° gesetzt.

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 1040 1041 1042 1043 1044 10

Die nachstehenden Messungen sollen nur dazu dienen, meine Arbeit zu bestätigen. Der Krystall, den ich der Messung unterwarf, war von der *variété metastatique Haüy*, mit sehr ungleichen Flächen. Es wurden alle sechs Winkel der sechsseitigen Pyramiden gemessen, drei schärfere und drei stumpfere.

1. Erster schärferer Pyramidenwinkel oder r zu r
an der Kante u nach Häüy.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	75° - 22'	6	75° - 21	11	75° - 24'	16	75° - 21'
2	- - 24	7	- - 24	12	- - 21	17	- - 21
3	- - 21	8	- - 20	13	- - 20	18	- - 22
4	- - 20	9	- - 21	14	- - 22	19	- - 24
5	- - 23	10	- - 23	15	- - 24		1431° - 58'

75° - 22', 0

$E = 40, 00; \quad P = 4, 512$

2. Zweiter schärferer Pyramidenwinkel.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	75° - 21'	6	75° - 23'	11	75° - 23'	16	75° - 23'
2	- - 22	7	- - 20	12	- - 19	17	- - 20
3	- - 20	8	- - 19	13	- - 19	18	- - 22
4	- - 20	9	- - 21	14	- - 22	19	- - 22
5	- - 21	10	- - 21	15	- - 21		1431° - 39'

75° - 21', 0
 $E = 32, 00$; $P = 5, 640$

3. Dritter schärferer Pyramidenwinkel.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$75^{\circ} - 22'$	6	$75^{\circ} - 22'$	11	$75^{\circ} - 21'$	16	$75^{\circ} - 22'$
2	- - 23	7	- - 21	12	- - 20	17	- - 20
3	- - 22	8	- - 20	13	- - 20	18	- - 20
4	- - 20	9	- - 21	14	- - 20	19	- - 21
5	- - 23	10	- - 23	15	- - 22		
							$1431^{\circ} - 43'$

$75^{\circ} - 21', 2$
 $E = 23, 16; P = 7, 794$

4. Erster stumpferer Pyramidenwinkel; r zu r
an der Kante x nach Haüy.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$35^0 - 37'$	6	$35^0 - 36'$	11	$35^0 - 38'$	16	$35^0 - 36'$
2	- - 36	7	- - 35	12	- - 38	17	- - 35
3	- - 36	8	- - 36	13	- - 37	18	- - 37
4	- - 37	9	- - 37	14	- - 36	19	- - 37
5	- - 36	10	- - 37	15	- - 35	20	- - 37
							$712^0 - 9'$
							$35^0 - 36', 5$
							$E = 16,00; P = 12,5$

5. Zweiter stumpferer Pyramidenwinkel.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	35° — 37'	6	35° — 36'	11	35° — 39'	16	35° — 37'
2	- — 37	7	- — 37	12	- — 38	17	- — 37
3	- — 39	8	- — 37	13	- — 38	18	- — 37
4	- — 36	9	- — 39	14	- — 36	19	- — 38
5	- — 37	10	- — 35	15	- — 37	20	- — 38

712° — 25'

35° — 37', 2

$E = 21, 8; \quad P = 9, 17$

6. Dritter stumpferer Winkel.

Zehn Messungen gaben im Mittel

$$35^{\circ} - 39', 7$$

Eine frühere Messung an einem sehr kleinen Krystall hatte als Mittel aus zehn Messungen

$$35^{\circ} - 37', 0$$

gegeben.

Wenn man die beiden eben gemessenen Winkel berechnet, indem man annimmt, daß der Winkel des Kalkspathrhomboëders gleich $105^{\circ} - 5'$ sei, so findet man folgende Werthe:

Neigung von r zu r' an der Kante x $144^{\circ} - 24' - 16''$

Neigung von r zu r' an der Kante u $104^{\circ} - 37' - 51''$

Die Complementary dieser beiden Winkel zu 180° sind $35^{\circ} - 35', 7$ und $75^{\circ} - 22', 1$; und diese Werthe stimmen mit denjenigen, die aus den Messungen hervorgehen, so gut überein, als man es nur wünschen kann.

Ich habe vorgezogen, die Neigungen von Flächen zu machen, welche die Natur selbst zu Begrenzungsflächen gemacht hatte; Bruchflächen geben im Allgemeinen selten so genaue Resultate, wegen des Gewaltigen ihrer Entstehung; indess habe ich der Vollständigkeit wegen auch die Neigung der Rhomboëderflächen an einem Bruchstück aus Island gemessen.

7. Neigung zweier benachbarter Rhomboëderflächen.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$105^{\circ} - 4'$	6	$105^{\circ} - 1'$	11	$105^{\circ} - 8'$	16	$105^{\circ} - 2'$	21	$105^{\circ} - 8'$
2	- - 4	7	- - 7	12	- - 4	17	- - 4		
3	- - 3	8	- - 6	13	- - 2	18	- - 6		$2206^{\circ} - 34'$
4	- - 8	9	- - 2	14	- - 7	19	- - 5		
5	- - 4	10	- - 3	15	- - 5	20	- - 1		
$105^{\circ} - 4', 5$ $E = 103, 25; P = 2, 136$									

Dieses Resultat weicht nur um eine halbe Minute von Malus' Messung ab.

Nehmen wir also $105^{\circ} - 5'$ als den der Wahrheit am nächsten kommenden Neigungswinkel des Kalkspathrhomboëders an, so finden wir:

Neigung zweier benachbarter Rhomboëderflächen	$105^{\circ} - 5' - 0'', 0$
Ebener Winkel an der Spitze des Rhomboëders	$101^{\circ} - 55' - 0'', 2$
Neigung der Rhomboëderfläche gegen die Axe ..	$45^{\circ} - 23' - 25'', 8$
Neigung der Rhomboëderkante gegen die Axe ..	$63^{\circ} - 44' - 45'', 9$
Werth der Rhomboëderspitze	$67^{\circ} - 37' - 30.$
Volumen des Rhomboëder	3, 1643
Oberfläche des Rhomboëder	13, 2281

III. Z i r k o n.

Die nachstehenden Beobachtungen sind alle nach der Malus'schen Methode vorgenommen worden, mit den Abänderungen, die in der ersten Abtheilung beschrieben sind. Der Krystall ist Fig. 4. vorgestellt, von beiden Seiten, damit die Bezeichnung der Flächen mit Nummern zu keinem Mißverständniß führen könne. Die Tabellen geben, wie oben, die Complementary der gemessenen Winkel zu 180° .

1. Neigung von No. 1 zu No. 2.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$47^{\circ} - 50'$	8	$47^{\circ} - 49'$	15	$47^{\circ} - 50'$	22	$47^{\circ} - 50'$	29	$47^{\circ} - 47'$
2	- - 49	9	- - 50	16	- - 49	23	- - 47	30	- - 49
3	- - 48	10	- - 49	17	- - 48	24	- - 50		$1433^{\circ} - 55'$
4	- - 46	11	- - 47	18	- - 46	25	- - 47		
5	- - 46	12	- - 48	19	- - 47	26	- - 48		
6	- - 47	13	- - 46	20	- - 47	27	- - 49		
7	- - 48	14	- - 47	21	- - 46	28	- - 45		

$47^{\circ} - 47', 8$
 $E = 62, 2; \log P = 0, 85944; -P = 7, 235$

2. Neigung von No. 2 zu No. 3.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	47° — 53'	5	47° — 49'	9	47° — 49'	13	47° — 48'
2	- — 49	6	- — 51	10	- — 54	14	- — 51
3	- — 52	7	- — 50	11	- — 48	15	- — 50
4	- — 50	8	- — 54	12	- — 53		717° — 42'
47° — 50' 8							
$E = 59,00; \log P = 0,28035; P = 1,907$							

3. Neigung von No. 1 zu No. 3.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	95° — 41'	5	95° — 39'	9	95° — 38'	13	95° — 39'
2	- — 37	6	- — 37	10	- — 37	14	- — 37
3	- — 37	7	- — 39	11	- — 38	15	- — 38
4	- — 40	8	- — 41	12	- — 40		1434° — 39'
95° — 38', 6							
$E = 29,8; \log P = 0,57692; P = 3,775$							

Obgleich 1. und 2. um drei Minuten von einander abweichen, was nach der Theorie nicht seyn sollte, so ist dies doch auf keinen Fehler in der Messung zu deuten, da ihre Summe genau die Neigung von No. 1 und No. 3. giebt.

4. Neigung von No. 3 zu No. 4.

a.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	84° — 22'	6	84° — 23'	11	84° — 19'	16	84° — 18'
2	- — 20	7	- — 18	12	- — 21	17	- — 20
3	- — 19	8	- — 20	13	- — 20		1433° — 47'
4	- — 20	9	- — 22	14	- — 22		
5	- — 22	10	- — 19	15	- — 22		
84° — 20', 4							
$E = 38,12; \log P = 0,57875; P = 3,791$							

10. 11. 1902. 10. 11. 1902.

07-58-071-007-001997

0.

194 Jan 1941

Neigung von No. 6 zu No. 1

21

Verwirft man die Beobachtungen 1 und 2., so haben wir folgende sechs Werthe des Kantenwinkels an der Basis des Zirkon-octaëders:

$$84^0 - 2f', 4 \text{ dessen } P = 3,775$$

$$84^{\circ} - 20', 4 \text{ dessen } P = 3,791$$

$$84^0 - 20',4 \text{ dessen } P = 3,260$$

$84^0 - 18', 2$ dessen $P = 2, 259$

$$84^0 - 18', 3 \text{ dessen } P = 1,324$$

$84^{\circ} - 20', 1$ dessen $P = 2,460$

Diese sechs Werthe, auf die bekannte Art combinirt, geben als den genauesten Werth dieses Winkels

$84^{\circ} - 20', 12$

$$P = 2,6016; \quad \log P = 0,4152405.$$

7. Neigung von No. 3 zu No. 8.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	56° — 43'	6	56° — 43'	11	56° — 42'	16	56° — 42'
2	- - 42	7	- - 42	12	- - 39	17	- - 43
3	- - 41	8	- - 42	13	- - 41	18	- - 42
4	- - 39	9	- - 38	14	- - 43	19	- - 41
5	- - 38	10	- - 42	15	- - 44		1077° — 7'
			56° — 41', 4				
			E = 54, 64; log P = 0, 51891; P = 3, 303				

8. Neigung von No. 8 zu No. 4.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	56° - 38'	6	56° - 40'	11	56° - 39'	16	56° - 39'
2	- - 37	7	- - 39	12	- - 38	17	- - 37
3	- - 41	8	- - 41	13	- - 42	18	- - 38
4	- - 38	9	- - 39	14	- - 37	19	- - 42
5	- - 36	10	- - 39	15	- - 41		1076° - 21'
56° - 39', 0							
$E = 56, 0$; $\log P = 0, 50826$; $P = 3, 223$							

Wir haben also folgende Werthe des Endkantenwinkels:

$$123^{\circ} - 18', 6 \text{ dessen } P = 3, 303$$

$$123^{\circ} - 21', 0 \text{ dessen } P = 3, 223$$

$$123^{\circ} - 21', 7 \text{ dessen } P = 4, 736$$

$$123^{\circ} - 19', 5 \text{ dessen } P = 3, 703$$

$$123^{\circ} - 20', 8 \text{ dessen } P = 2, 402$$

$$123^{\circ} - 19', 2 \text{ dessen } P = 4, 241$$

Das Resultat dieser sechs Werthe ist:

$$123^{\circ} - 20', 15$$

$$P = 2, 3111; \log P = 0, 3638187$$

Bezeichnet man diesen Winkel mit A , und den doppelten Neigungswinkel der Octaëderfläche gegen die Axe mit I , den Neigungswinkel der Octaëderkante gegen die Axe mit r , so ist

$$\cos r = \cot \frac{1}{2} A$$

$$\text{tang } r = \sqrt{2} \cdot \text{tang } \frac{1}{2} I$$

$$\frac{dA}{dI} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} I \cdot \cos^3 \frac{1}{2} A}{\cos^3 \frac{1}{2} I \cdot \sin \frac{1}{2} A}$$

Setzt man in diesen Formeln $\frac{1}{2} A = 61^{\circ} - 40' - 4'', 5$, so erhält man $I = 95^{\circ} - 41', 21$, $\log \left(\frac{dA}{dI}\right)^2 = 0, 5497998 - 1$
 $\left(\frac{dA}{dI}\right)^2 = 0, 35465$.

Nach den Messungen ist $I = 95^{\circ} - 39', 88$. Wir haben also folgende Tafel zu entwerfen:

$$1 \cdot 2, 6016 \cdot 5739', 88 = 1 \cdot 2, 6016 \cdot I$$

$$0, 35465 \cdot 2, 3111 \cdot 5741, 21 = 0, 35465 \cdot 2, 3111 \cdot I$$

Hieraus

$$I = 95^{\circ} - 40' - 14'', 4$$
$$P = 3,0867 \quad \log P = 0,48950$$

$$P = 3,0867 \quad \log P = 0,48950$$

Die Winkel des Zirkonoctaëders sind also:

Endkantenwinkel.....	$123^{\circ} - 19' - 34''$, 0
Ebener Winkel an der Spitze.....	$73^{\circ} - 5' - 34''$, 6
Neigung der Octaëderfläche gegen die Axe	$47^{\circ} - 50' - 7''$, 2
Neigung der Octaëderkante gegen die Axe	$57^{\circ} - 21' - 56''$, 4
Werth der Octaëderspitze.....	$66^{\circ} - 39' - 8''$, 0
Volumen des Octaëders.....	3, 25143
Oberfläche des Octaëders.....	13, 1597

IV. Schwerspath.

Es wurden zwei Krystalle aus der Auvergne der Messung unterworfen, einer von einem Centimeter Durchmesser; bei dem andern, nur ein Drittheil so groß, wurden nur zwei Winkel gemessen. Die Messungen wurden eben so vorgenommen, wie beim Zirkon. Aus Fig. 5 kann man die Nummern der Flächen ansehen.

1. Neigung von No. 1 zu No. 2. (*d* zu *d* nach Häüy).

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$102^0 - 19'$	7	$102^0 - 20'$	13	$102^0 - 15'$	19	$102^0 - 18'$	25	$102^0 - 20'$
2	- - 16	8	- - 20	14	- - 16	20	- - 15	26	- - 19
3	- - 16	9	- - 16	15	- - 21	21	- - 18	27	- - 15
4	- - 19	10	- - 16	16	- - 16	22	- - 20	28	- - 20
5	- - 15	11	- - 22	17	- - 17	23	- - 16		$2864^0 - 15'$
6	- - 19	12	- - 17	18	- - 20	24	- - 15		

$102^0 - 17', 6$

$E = 122, 3; \log P = 0, 50583; P = 3, 205$

2. Neigung von No. 3 zu No. 4. (o zu o nach Häüy).

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	74° — 38'	6	74° — 36'	11	74° — 36'	16	74° — 38'	21	74° — 35'
2	- — 36	7	- — 36	12	- — 36	17	- — 34	22	- — 35
3	- — 34	8	- — 35	13	- — 34	18	- — 35	23	- — 34
4	- — 35	9	- — 35	14	- — 35	19	- — 37	24	- — 34
5	- — 38	10	- — 38	15	- — 38	20	- — 39	1790° — 21'	
74° — 35', 8									
$E = 56,75$; $\log P = 0,70544$; $P = 5,075$									

3. Neigung von No. 5 zu No. 6.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	74° — 39'	6	74° — 38'	11	74° — 37'	16	74° — 39'	21	74° — 35'
2	- — 37	7	- — 36	12	- — 34	17	- — 35	22	- — 36
3	- — 34	8	- — 35	13	- — 34	18	- — 34	23	- — 34
4	- — 36	9	- — 36	14	- — 35	19	- — 35	24	- — 35
5	- — 41	10	- — 38	15	- — 38	20	- — 39	1790° — 30'	
74° — 36', 2									
E = 90,56; log P = 0,50256; P = 3,181									

4. Neigung von No. 3 zu No. 6.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	105° — 27'	6	105° — 22'	11	105° — 28	16	105° — 21'
2	- — 23	7	- — 27	12	- — 25	17	.. — 24
3	- — 24	8	- — 26	13	- — 23	1792° — 2'	
4	- — 26	9	- — 22	14	- — 27		
5	- — 26	10	- — 25	15	- — 26		
105° — 24', 8							
E = 66,48; log P = 0,33706; P = 2,173							

5. Neigung von No. 4 zu No. 5.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$105^{\circ} - 25'$	6	$105^{\circ} - 22'$	11	$105^{\circ} - 27'$	16	$105^{\circ} - 22'$
2	- 22	7	- 25	12	- 25	17	- 24
3	- 20	8	- 26	13	- 23	$1791^{\circ} - 46'$	
4	- 27	9	- 21	14	- 26		
5	- 24	10	- 22	15	- 25		
$105^{\circ} - 23', 8$							
$E = 71, 88; \log P = 0, 30341; P = 2, 011$							

6 Dieselbe Neigung beim kleinen Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	105° — 27'	6	105° — 20'	11	105° — 27'	16	105° — 20'
2	- — 22	7	- — 29	12	- — 22	17	- — 22
3	- — 22	8	- — 24	13	- — 22	1791° — 42'	
4	- — 26	9	- — 22	14	- — 28		
5	- — 23	10	- — 22	15	- — 24		
105° — 23', 6							
$E = 121,92; \log P = 0,07372; P = 1,185$							

Diese fünf Säulenwinkel

$74^{\circ} - 35', 8$, dessen $P = 5,075$
$74^{\circ} - 36', 2$, dessen $P = 3,181$
$74^{\circ} - 35', 2$, dessen $P = 2,173$
$74^{\circ} - 36', 2$, dessen $P = 2,011$
$74^{\circ} - 36', 4$, dessen $P = 1,185$

geben combinirt

$$74^{\circ} - 35', 90$$

$$P = 18,128; \log P = 1,25835$$

7. Neigung von No. 3 zu No. 1.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	61° — 51'	7	61° — 51'	13	61° — 52'	19	61° — 52'	25	61° — 53'
2	- — 52	8	- — 50	14	- — 51	20	- — 49	26	- — 49
3	- — 49	9	- — 49	15	- — 50	21	- — 49	27	- — 48
4	- — 49	10	- — 48	16	- — 49	22	- — 50	28	- — 50
5	- — 50	11	- — 49	17	- — 50	23	- — 51	29	- — 51
6	- — 53	12	- — 54	18	- — 51	24	- — 52	1793° — 22'	
61° — 50', 4									
$E = 67,04$; $\log P = 0,79734$; $P = 6,271$									

8. Neigung von No. 4 zu No. 2.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	61° — 53'	7	61° — 52'	13	61° — 53'	19	61° — 52'	25	61° — 51'
2	- — 51	8	- — 52	14	- — 52	20	- — 53	26	- — 51
3	- — 51	9	- — 48	15	- — 49	21	- — 50	27	- — 49
4	- — 49	10	- — 51	16	- — 50	22	- — 49	28	- — 49
5	- — 51	11	- — 50	17	- — 51	23	- — 53	29	- — 52
6	- — 53	12	- — 51	18	- — 53	24	- — 52	1793° — 41'	
61° — 51', 0									
$E = 62,00$; $\log P = 0,83136$; $P = 6,782$									

9. Dieselbe Neigung am kleinen Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	61° — 52'	7	61° — 50'	13	61° — 49'	19	61° — 53'	25	61° — 50'
2	- — 51	8	- — 51	14	- — 52	20	- — 49	26	- — 49
3	- — 50	9	- — 49	15	- — 49	21	- — 50	27	- — 49
4	- — 48	10	- — 46	16	- — 49	22	- — 50	28	- — 50
5	- — 50	11	- — 53	17	- — 48	23	- — 50	29	- — 50
6	- — 54	12	- — 53	18	- — 54	24	- — 52	1793° — 20'	
61° — 50', 3									
$E = 100,61$; $\log P = 0,62118$; $P = 4,180$									

Diese Messungen geben also folgende Werthe:

$$118^{\circ} - 9', 6, \text{ dessen } P = 6,271$$

$$118^{\circ} - 9', 0, \text{ dessen } P = 6,782$$

$$118^{\circ} - 9', 7, \text{ dessen } P = 4,180$$

Diese geben combinirt

$$118^{\circ} - 9', 4$$

$$P = 15,100; \log P = 1,17898.$$

Diese Resultate stimmen so genau überein, daß ich mir die Mühe ersparen kann, die drei gemessenen Winkel, von denen man offenbar einen aus den beiden anderen berechnen kann, noch weiter zu combiniren. Ich nehme deshalb die beiden letzten Winkel, welche hinreichen, alle übrigen Winkel des Schwerspaths zu bestimmen, für die wahren Elemente seiner Krystallisationen. Berechnet man aus ihnen den ersten Winkel, so findet man

$$77^{\circ} - 43' - 11''$$

welcher nur um 47 Secunden von dem beobachteten Werthe (1) abweicht.

Berechnet man umgekehrt aus den beiden ersten Winkeln den letzten, so wird der Unterschied noch kleiner.

$$\text{Die Rechnung giebt } \dots 118^{\circ} - 9' - 32''$$

$$\text{die Beobachtung } \dots \dots \dots 118^{\circ} - 9' - 24''$$

$$\text{Differenz } \dots \dots \dots 0^{\circ} - 0' - 8''$$

Man kann ein Octaëder mit rhombischer Basis, dessen Endkanten durch die Flächen M , dessen Kanten an der Basis durch die Flächen d ⁽¹⁾ nach der Häüyschen Bezeichnung gerade abge-

(¹) Dieselben Flächen, die in der beiliegenden Figur 7 mit 1, 2 bezeichnet sind. Die Flächen M gehen dem Blätterdurchgang von $78^{\circ} - 19' - 59''$ (nach Häüy $78^{\circ} - 28'$) parallel.

stumpft werden, als Grundform des Schwerspaths ansehen. An diesem Octaëder sind:

Endkantenwinkel	{	$92^{\circ} - 12' - 18'', 4$
		$112^{\circ} - 4' - 16'', 6$
Kantenwinkel an der Basis		$125^{\circ} - 51' - 24'', 8$
Neigung der Octaëderfläche gegen die Axe . .		$27^{\circ} - 4' - 17'', 6$
Neigung der Octaëderkanten gegen die Axe	{	$33^{\circ} - 16' - 46''$
		$39^{\circ} - 9' - 59'', 5$
Neigung der Kanten an der Basis		$102^{\circ} - 16' - 49''$
Volumen des Octaëders, halbe Axe = 1		0, 71295

V. Topas aus Sibirien.

Die nachstehenden Messungen habe ich, weil die Winterkälte mich hinderte, am offenen Fenster zu arbeiten, im Zimmer gemacht. Ich wählte zwei zusammenhängende Säle; in dem ersten stand mein Instrument, in dem zweiten, in einer Entfernung von etwa dreißig Schritt vom Instrument, waren zwei übereinander befindliche Rauten eines Fensters mit zwei viereckigen mit einem kleinen runden Loch versehenen Stücken Papp verdeckt; die beiden Löcher befanden sich ziemlich senkrecht übereinander, und so, daß die Mitte zwischen beiden mit dem Mittelpunkt des Instruments ungefähr in derselben Horizontallinie lagen. Ich richtete nun das Instrument so, daß die Ebene des getheilten Kreises mit der Ebene, die man sich durch die beiden Gegenstände (die Löcher in den viereckigen Stücken Papp) und den Krystall gelegt denken kann, ziemlich parallel war, und stellte es so lange, bis das auf dem kleinen viereckigen Glase abgespiegelte Bild des obern Gegenstandes auf beiden Oberflächen des Glases nacheinander mit

dem untern Gegenstande zusammenfiel; ich maß nun die Winkel des Krystalls, wie es in der ersten Abtheilung dieser Schrift beschrieben ist. —

Das Instrument war nicht dasselbe, welches ich in den vorigen Messungen gebraucht habe; es gab nur von drei zu drei Minuten.

Die Krystalle waren sämmtlich von vorzüglicher Schönheit, einer von ihnen selbst ziemlich groß. Die Flächen sind in den Tabellen eben so bezeichnet, wie in der neuesten Ausgabe von *Haüy traité de minéralogie*; überdies sind sie so benannt, daß kein Mißverständniß zu fürchten ist. Als Grundform ist dasjenige Octaëder angesehen worden, welches von den Flächen, die Haüy mit k bezeichnet, gebildet wird, und welches also einen Rhombus zur Basis hat.

1. Neigung von k zu k oder stumpfe Octaëderendkante.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$49^{\circ} - 36'$	5	$49^{\circ} - 39'$	9	$49^{\circ} - 33'$	13	$49^{\circ} - 36'$
2	- - 36	6	- - 39	10	- - 36	14	- - 39
3	- - 33	7	- - 39	11	- - 36	15	- - 42
4	- - 39	8	- - 36	12	- - 39		$744^{\circ} - 18'$
$49^{\circ} - 37', 2$							
$E = 172, 8; \log P = 0, 11464; P = 1, 3021$							

2. Derselbe Winkel wiederholt.

I.	II.	I.	II.
1	$49^{\circ} - 36'$	5	$49^{\circ} - 39'$
2	- - 33	6	- - 39
3	- - 36	7	- - 39
4	- - 39		$347^{\circ} - 21'$
$49^{\circ} - 37', 2$			
$E = 33, 48; \log P = 0, 86438 - 1;$			
$P = 0, 73178$			

3. Derselbe Winkel an der hintern Seite des Krystalls.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	49° — 36'	5	49° — 36'	9	49° — 36'	13	49° — 36'
2	- - - 36	6	- - - 36	10	- - - 36	14	- - - 39
3	- - - 36	7	- - - 39	11	- - - 36	15	- - - 36
4	- - - 36	8	- - - 39	12	- - - 33		744° — 8'
			49° — 36', 4				
			$E = 33, 60$;				$\log P = 0, 52481$;
							$P = 3, 3482$

Diese drei Winkel, nämlich

$49^0 - 37', 2$, dessen $P = 1, 3021$

$49^{\circ} - 37', 2$, dessen $P = 0,7318$

$49^{\circ} - 36', 4$, dessen $P = 3,3482$

nach unsern Regeln combinirt, geben als den richtigsten Werth dieses Winkels

$49^0 - 36', 7$

4. Neigung von k gegen die Rückfläche, oder scharfer Endkantenwinkel des Grundoctaëders.

[illegible]

5. Neigung von M zu M (Säulenwinkel).

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	55° — 45'	8	55° — 42'	15	55° — 39'	22	55° — 39'
2	- - - 39	9	- - - 39	16	- - - 42	23	- - - 42
3	- - - 39	10	- - - 45	17	- - - 45	24	- - - 45
4	- - - 48	11	- - - 45	18	- - - 45	25	- - - 45
5	- - - 45	12	- - - 42	19	- - - 48	26	- - - 45
6	- - - 45	13	- - - 48	20	- - - 42	1448° — 48'	
7	- - - 42	14	- - - 45	21	- - - 42		
55° — 43', 4							
E = 202, 16; log P = 0, 22123; P = 1, 6643							

6. Derselbe Winkel an einem andern Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	55° — 45'	8	55° — 42'	15	55° — 39'	22	55° — 39'
2	- — 39	9	- — 39	16	- — 45	23	- — 45
3	- — 39	10	- — 42	17	- — 45	24	- — 45
4	- — 45	11	- — 45	18	- — 42	25	- — 45
5	- — 48	12	- — 45	19	- — 48	26	- — 48
6	- — 45	13	- — 48	20	- — 42	1448° — 57'	
7	- — 45	14	- — 39	21	- — 48		
55° — 43', 7							
E = 255, 14; log P = 0, 12215; P = 1, 3248							

Diese beiden Werthe des Säulenwinkels, nämlich

$55^{\circ} - 43', 4$, dessen $P = 1, 6643$

$55^{\circ} - 43', 7$, dessen $P = 1, 3248$

geben combinirt

$55^{\circ} - 43' - 32''$

7. Neigung von M zu l .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$18^{\circ} - 45'$	6	$18^{\circ} - 42'$	11	$18^{\circ} - 45'$	16	$18^{\circ} - 42'$
2	- - 45	7	- - 45	12	- - 45	17	- - 45
3	- - 45	8	- - 42	13	- - 45	18	- - 45
4	- - 42	9	- - 45	14	- - 45	19	- - 45
5	- - 45	10	- - 45	15	- - 45		$356^{\circ} - 3'$
$18^{\circ} - 44', 3$							
$E = 28,51; \log P = 0,801428; P = 6,3311$							

8. Neigung von k zu M (Neigung der Octaëderfläche gegen die Säulenfläche).

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$26^{\circ} - 0'$	5	$26^{\circ} - 9'$	9	$26^{\circ} - 3'$	13	$26^{\circ} - 3'$
2	- - 3	6	- - 3	10	- - 12	14	- - 6
3	- - 9	7	- - 0	11	- - 6		$365^{\circ} - 9'$
4	- - 3	8	- - 6	12	- - 6		
$26^{\circ} - 5', 0$							
$E = 155,00; P = 0,63227; \log P = 0,80090 - 1$							

9. Derselbe Winkel an einem kleineren Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$26^{\circ} - 9'$	5	$26^{\circ} - 6'$	9	$26^{\circ} - 6'$	13	$26^{\circ} - 6'$
2	- - 3	6	- - 3	10	- - 6	14	- - 9
3	- - 3	7	- - 3	11	- - 6	15	$365^{\circ} - 9'$
4	- - 0	8	- - 6	12	- - 3		
$26^{\circ} - 5', 0$							
$E = 83,0; \log P = 0,07214; P = 1,1807$							

10. Neigung von o gegen das nicht anliegende M .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$66^{\circ} - 15'$	4	$66^{\circ} - 15'$	7	$66^{\circ} - 9'$	10	$66^{\circ} - 12'$
2	- - 9	5	- - 12	8	- - 9	11	- - 18
3	- - 12	6	- - 15	9	- - 12		$728^{\circ} - 18'$
$66^{\circ} - 12', 5$							
$E = 86,75; \log P = 0,84349 - 1; P = 0,69741$							

11. Neigung von n zu n bei einem größeren Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	87° — 15'	7	87° — 15'	13	87° — 18'	19	87° — 15'	25	87° — 15'
2	- — 9	8	- — 18	14	- — 9	20	- — 15	26	- — 12
3	- — 15	9	- — 18	15	- — 18	21	- — 18	27	- — 12
4	- — 18	10	- — 9	16	- — 15	22	- — 12	28	- — 15
5	- — 18	11	- — 18	17	- — 18	23	- — 12	29	- — 15
6	- — 12	12	- — 18	18	- — 12	24	- — 15	2530° — 9'	
118,20 = 9 : 821,87° — 14', 8 12,82 = 3									
E = 250,76; log P = 0,22451; P = 1,6709									

12. Neigung von γ zu n bei demselben Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	18° — 42'	6	18° — 39'	11	18° — 42'	16	18° — 39'
2	- — 39	7	- — 45	12	- — 42	17	- — 39
3	- — 42	8	- — 42	13	- — 39	18	- — 39
4	- — 42	9	- — 39	14	- — 42	19	- — 42
5	- — 42	10	- — 42	15	- — 39	354° — 57'	
1 — 0,0002, 0 = 9 18° — 40', 9 0,0002 = 9 0,0002 = 9							
$E = 57,79; \log P = 0,49463; P = 3,1234$							

Alle diese Beobachtungen stimmen sehr gut untereinander überein. Nimmt man das Resultat der ersten drei Messungen und das der vierten als vollkommen richtig, und berechnet darnach die andern Winkel, so findet man

	Rechnung.	Beobachtung.
Neigung von M zu M	55° — 41' — 40"	55° — 43' — 32"
Neigung von M zu l	18° — 43' — 43"	18° — 44' — 18"
Neigung von k zu M	26° — 4' — 56"	26° — 5' — 0"
Neigung von 0 gegen das nicht anliegende M	66° — 15' — 3"	66° — 12' — 30"
Neigung von n zu n	87° — 14' — 54"	87° — 14' — 48"
Neigung von γ zu n	18° — 41' — 39"	18° — 40' — 54"

An größeren Krystallen habe ich einige Abweichungen gefunden. So fand ich bei einem Krystall, der schön gebildet war, aber über einen halben Zoll im Durchmesser hatte:

	Rechnung.	Beobachtung.
Neigung von M zu M	$55^{\circ} - 41' - 40''$	$55^{\circ} - 50' - 0''$
Neigung von l zu l	$86^{\circ} - 50' - 54''$	$86^{\circ} - 43' - 0''$
Neigung von n zu einer Fläche, die zwischen n und P liegt, und bei welcher die Tangente der Neigung gegen die Axe andert-halbmal so groß ist, als die Tangente der Neigung von n gegen die Axe	$11^{\circ} - 11' - 21''$	$11^{\circ} - 7' - 6''$

Ich halte es für überflüssig, diese Beobachtungen noch weiter zu combiniren, weil man aus ihrer Vergleichung sieht, daß die gefundenen Werthe der Endkantenwinkel des Grundoctaëders nur um eine sehr geringe Größe falsch seyn können, um eine Größe, welche innerhalb der Grenzen liegt, in welchen die Natur selbst bei der Bildung der Krystallwinkel hin und her schwankt.

Die vorzüglichsten Winkel beim Topas sind also:

Endkantenwinkel des Grundoctaëders	$\left\{ \begin{array}{l} 130^{\circ} - 23' - 17'' \\ 74^{\circ} - 53' - 30'' \end{array} \right.$
Neigung der Octaëderfläche gegen die Axe	$26^{\circ} - 4' - 56''$
Neigung der Endkanten gegen die Axe	$\left\{ \begin{array}{l} 46^{\circ} - 22' - 33'' \\ 28^{\circ} - 59' - 57'' \end{array} \right.$
Neigung der Kanten an der Basis	$124^{\circ} - 18' - 20''$
Volumen des Octaëders	$0,775427$
Volumen des Octaëders, das von den Flächen 0 gebildet wird 3, 101708	

VI. Beryll aus Sibirien.

Die Messungen wurden eben so und mit demselben Instrument vorgenommen, wie die Messungen der Topaswinkel.

1. Neigung von s zu s am ersten Krystall.

121

2. Derselbe Winkel wiederholt.

I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$41^{\circ} - 18'$	4	$41^{\circ} - 18'$	7	$41^{\circ} - 18'$
2	- - 18	5	- - 18	8	- - 21
3	- - 12	6	- - 21	9	- - 18
					$371^{\circ} - 42'$
			$41^{\circ} - 18', 0$		
			$E = 54, 00$; $\log P = 0, 87506 - 1$; $P = 0, 7500$		

3. Derselbe Winkel nochmals wiederholt.

I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	41° — 21'	4	41° — 15'	7	41° — 15
2	- — 18	5	- — 21	8	- — 21
3	- — 15	6	- — 18	9	- — 18
				371° — 42'	
41° — 18', 0					
$E = 54, 00; \log P = 0, 87506 - 1; P = 0, 7500$					

4. Dieselbe Neigung an demselben Krystall an der benachbarten Endkante.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	41° — 33'	6	41° — 33'	11	41° — 30'	16	41° — 30'
2	— — 27	7	— — 30	12	— — 27	17	— — 33
3	— — 30	8	— — 33	13	— — 33		705° — 54'
4	— — 30	9	— — 36	14	— — 33		
5	— — 33	10	— — 30	15	— — 33		

41° — 31', 4

$E = 92, 12$; $\log P = 0, 19551$; $P = 1, 5686$

5. Derselbe Winkel wiederholt.

[illegible]

6. Neigungswinkel von s zu M an demselben Krystall.

[illegible]

7. Neigung von s zu P an demselben Krystall.

Acht Beobachtungen gaben im Mittel

$45^{\circ} - 3', 3$

8. Neigung von s zu s beim zweiten Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$41^{\circ} - 21'$	4	$41^{\circ} - 21'$	7	$41^{\circ} - 24'$
2	- - 21	5	- - 24	8	- - 21
3	- - 18	6	- - 21	9	- - 21
$41^{\circ} - 21', 3$				$372^{\circ} - 12'$	
$E = 22, 01; \log P = 0, 26500; P = 1, 8408$					

9. Neigung von s zu M am zweiten Krystall.

[illegible]

10. Neigung von s zu s beim dritten Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$41^{\circ} - 15'$	7	$41^{\circ} - 15'$	13	$41^{\circ} - 18'$	19	$41^{\circ} - 15'$	25	$41^{\circ} - 15'$
2	- - 15	8	- - 12	14	- - 21	20	- - 12	26	- - 21
3	- - 15	9	- - 18	15	- - 15	21	- - 12		$1073^{\circ} - 12'$
4	- - 15	10	- - 15	16	- - 18	22	- - 18		
5	- - 21	11	- - 18	17	- - 21	23	- - 18		
6	- - 21	12	- - 15	18	- - 15	24	- - 18		

$41^{\circ} - 16', 6$

$E = 138,68; \log P = 0,38691; P = 2,4373$

11. Neigung von s zu t beim dritten Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	23° — 12'	8	23° — 15'	15	23° — 15'	22	23° — 6'	29	23° — 12'
2	- — 12	9	- — 9	16	- — 9	23	- — 9	30	- — 18
3	- — 12	10	- — 6	17	- — 12	24	- — 9	31	- — 12
4	- — 9	11	- — 15	18	- — 12	25	- — 15		718° — 45'
5	- — 9	12	- — 15	19	- — 12	26	- — 12		
6	- — 6	13	- — 9	20	- — 9	27	- — 12		
7	- — 12	14	- — 9	21	- — 12	28	- — 9		

23° — 11', 1

$E = 255, 51$; $\log P = 0, 27427$; $P = 1, 8805$

12. Neigung von s zu P beim dritten Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	44° — 57'	5	45° — 0	9	44° — 57'	13	44° — 57'
2	- - 57	6	- - 0	10	- - 54	14	45° — 0
3	- - 57	7	- - 0	11	- - 57	15	- - 0
4	- - 57	8	- - 0	12	- - 57	16	- - 0
						719° — 30'	
$E = 81,04; \log P = 0,19852; P = 1,5795$							

13. Neigung von s zu M bei demselben Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$52^{\circ} - 18'$	5	$52^{\circ} - 18'$	9	$52^{\circ} - 15'$	13	$52^{\circ} - 18'$
2	- - 15	6	- - 18	10	- - 15	14	- - 18
3	- - 15	7	- - 21	11	- - 18		$731^{\circ} - 45'$
4	- - 12	8	- - 12	12	- - 21		
$52^{\circ} - 16',0$							
$E = 110,0; \log P = 0,94983 - 1; P = 0,89090$							

Berechnet man aus der sechsten Messung den Neigungswinkel von s zu s (nach der Haüy'schen Bezeichnung), so findet man sein Complement gleich

$$41^{\circ} - 24',5$$

Die Messungen 1. 2. 3. geben sehr nahe den Winkel zu

$$41^{\circ} - 18',0$$

und die Messungen 4 und 5. zu

$$41^{\circ} - 32'$$

Das Mittel aus diesen beiden Werthen ist

$$41^{\circ} - 25'$$

also dem berechneten Werthe sehr nahe.

Aus der dreizehnten Messung findet man denselben Winkel gleich

$$41^{\circ} - 22';$$

aus der zwölften Messung gleich

$$41^{\circ} - 21'$$

welche beide Resultate der achten Messung sehr nahe kommen.

Berechnet man ferner aus der zehnten Messung den Winkel, den die dritte giebt, so findet man ihn gleich

$$23^{\circ} - 12', 9$$

welches der eilften Messung wieder sehr nahe kommt.

Stellt man sich die Form, welche durch die Flächen s gebildet wird, als eine doppelt sechsseitige Pyramide vor, deren Basis ein Zickzack bildet, und bei welcher die beiden Endkantenwinkel $138^{\circ} - 42'$ und $133^{\circ} - 28'$ sind, wie die Messungen sie geben; so findet man die Neigung von s gegen die Axe des Krystalls gleich

$$44^{\circ} - 59', 5$$

welches dem Mittel aus den Beobachtungen 12 und 7, welches gleich $44^{\circ} - 59', 7$ ist, beinahe gleich kommt.

Da es demnach unmöglich ist, aus den bisherigen Beobachtungen die Winkel des Berylls mit Genauigkeit zu bestimmen, so unterwarf ich noch einen sehr schönen und überaus regelmässig gebildeten Krystall der Messung und bekam folgende Resultate:

14. Neigung von t zu t .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	28° — 54'	5	28° — 51	9	28° — 54'	13	28° — 57'
2	- — 51	6	- — 54	10	- — 57	375° — 51'	
3	- — 54	7	- — 54	11	- — 57		
4	- — 54	8	- — 57	12	- — 57		
28° — 54',7							
E = 56,77; log P = 0,17274; P = 1,4885							

15. Neigung von t zu P .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	29° — 57'	8	29° — 57'	15	29° — 57'	22	29° — 57'
2	- — 57	9	- — 57	16	- — 57	23	- — 57
3	- — 57	10	- — 57	17	- — 54	24	30° — 0'
4	- — 54	11	- — 57	18	- — 57	718° — 39'	
5	- — 54	12	- — 57	19	- — 54		
6	- — 57	13	- — 57	20	- — 57		
7	30° — 0'	14	- — 54	21	- — 57		
29° — 56', 6							
E = 59,62 ; log P = 0,68402 ; P = 4,8308							

16. Neigung von s zu P .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$44^{\circ} - 57'$	5	$44^{\circ} - 57'$	9	$44^{\circ} - 57'$	13	$44^{\circ} - 57'$
2	- - 54	6	- - 57	10	- - 54	14	- - 57
3	- - 57	7	$45^{\circ} - 0$	11	- - 57	15	$45^{\circ} - 0'$
4	- - 54	8	- - 0	12	- - 54	16	$44^{\circ} - 57'$
$44^{\circ} - 56', 8$							
$E = 62,44; \log P = 0,31175; P = 2,050$							

Die Beobachtung 16. stimmt sehr gut mit der Messung 12. zusammen. Berechnet man aus dem Complement ihres Mittels $44^{\circ} - 56', 5$ das Complement der Neigung von t zu P , so findet man

$$29^{\circ} - 56' - 58''$$

welches der Beobachtung 15. außerordentlich nahe kommt. Berechnet man aus der Beobachtung 15. das Complement der Neigung von t zu t , so findet man

$$28^{\circ} - 54' - 16''.$$

welches der Beobachtung 14. wieder außerordentlich nahe kommt. Sehen wir also die Beobachtung 15. für vollkommen richtig an, so sind die vorzüglichsten Winkel des Berylls folgende:

Neigung zweier benachbarten Pyramidenflächen (*t*) $151^{\circ} - 5' - 44''$
 Neigung der Pyramidenfläche gegen die Axe $60^{\circ} - 3' - 24''$
 Neigung der Endkante gegen die Axe $63^{\circ} - 29' - 16''$
 Volumen der Doppelpyramide 6,95994

Nimmt man ein Rhomboëder, das von den abwechselnden Pyramidenflächen gebildet wird, als die Grundform des Berylls, so ist:

Neigung zweier benachbarten Rhomboëderflächen $128^{\circ} - 46' - 40''$
 Neigung der Rhomboëderfläche gegen die Axe . . $60^{\circ} - 3' - 24''$
 Neigung der Rhomboëderkante gegen die Axe . . $73^{\circ} - 55' - 57''$
 Volumen des Rhomboëders 9,27992

VII. P i s t a c i t.

Die nachstehenden Beobachtungen sind unter denselben Verhältnissen gemacht worden, als die beim Topas; die zwei Krystalle, die der Messung unterworfen wurden, waren nicht sehr dazu geeignet, genaue Resultate zu geben (der eine war aus Norwegen, der andere aus Sibirien); ich habe mir deshalb nicht die Mühe gegeben, das Gewicht jeder Beobachtung zu berechnen; man wird indess aus der Vergleichung der Beobachtungen unter einander sehen, daß die Bestimmung der Hauptwinkel nicht um viel mehr als eine Minute falsch seyn kann. Die Flächen sind wieder eben so bezeichnet, wie in *Haüy Traité de minéralogie*.

Um deutlich zu machen, von welcher Grundform ich bei der Angabe der Hauptwinkel des Pistacits ausgegangen bin, ist die

... als die Grundform des Verfalls, so ist:

1. Neigung von n zu n_1

$$70^{\circ} - 39', 7$$

2. Dieselbe Neigung wiederholt.

[illegible]

3. Neigung von T zu r .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	50° — 39'	5	50° — 39'	9	50° — 39'	13	50° — 39'
2	— — 36	6	— — 39	10	— — 36	14	— — 39
3	— — 39	7	— — 39	11	— — 39		708° — 51'
4	— — 36	8	— — 36	12	— — 36		
50° — 38', 0							

4. Neigung von n zu M

wurde aus fünf Beobachtungen gleich

$$75^{\circ} - 10', 2$$

gefunden.

5. Neigung von M zu r .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$116^{\circ} - 12'$	5	$116^{\circ} - 9'$	9	$116^{\circ} - 15'$	13	$116^{\circ} - 9'$
2	- - 9	6	- - 12	10	- - 9	14	- - 6
3	- - 15	7	- - 9	11	- - 6	15	- - 15
4	- - 6	8	- - 6	12	- - 12	16	- - 12
$116^{\circ} - 10', 1$						$1858^{\circ} - 42'$	

6. Neigung von M' zu T (siehe Fig. XI.)

wurde aus sechs Beobachtungen gleich

$$166^{\circ} - 51', 5$$

gefunden.

7. Die Neigung von n zu einer Bruchfläche, die der Fläche M parallel ging,

wurde, als Mittel aus sieben Beobachtungen, gefunden gleich

$$104^{\circ} - 48'$$

Setzt man nach den drei ersten Beobachtungen die Neigung von n zu n gleich $109^{\circ} - 20'$ und die von T zu r gleich $129^{\circ} - 22'$, so findet man:

	Rechnung.	Beobachtung.
Neigung von n zu M	$75^{\circ} - 11' - 37''$	$75^{\circ} - 10' - 12''$
Complement zu dieser Neigung	$104^{\circ} - 48' - 23''$	$104^{\circ} - 48' - 0''$
Neigung von M zu r	$116^{\circ} - 12' - 33''$	$116^{\circ} - 10' - 6''$
Neigung von M' zu T	$166^{\circ} - 50' - 33''$	$166^{\circ} - 51' - 30''$

Man sieht, daß die Beobachtung mit der Rechnung so gut übereinstimmt, als es sich nur von solchen Beobachtungen mit einer Krystallform, bei der mehrere Flächen stark gestreift sind, erwarten läßt.

Denkt man sich nun die Flächen M und n als gerade Abstumpfungen der Endkanten des Grundoctaëders des Pistacits, so sind bei diesem Octaëder mit rhombischer Basis:

Die Endkantenwinkel oder Neigungen zweier benachbarter Octaëderflächen	$\left\{ \begin{array}{l} 116^{\circ} - 9' - 16'' \\ 80^{\circ} - 48' - 28'' \end{array} \right.$
Neigung der Octaëderfläche gegen die Axe	$22^{\circ} - 33' - 21''$
Neigung der Endkanten gegen die Axe	$\left\{ \begin{array}{l} 26^{\circ} - 12' - 33'' \\ 35^{\circ} - 20' - 0'' \end{array} \right.$
Neigung der Kanten an der Basis	$110^{\circ} - 26' - 54''$
Volumen des Octaëders	$0,46529$

7. Die Neigung von n zu einer Bruchfläche, die der Fläche M
parallel ging.
wurde als Mittel aus sieben Beobachtungen, gefunden gleich
 $104^{\circ} - 48'$

VIII. Vesuvian aus Sibirien.

1. Neigung von c zu P .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	36° — 42'	7	36° — 42'	13	36° — 36'	19	36° — 42'
2	- - 42	8	- - 39	14	- - 36	20	- - 39
3	- - 39	9	- - 42	15	- - 36		733° — 21'
4	- - 39	10	- - 45	16	- - 42		
5	- - 39	11	- - 39	17	- - 39		
6	- - 42	12	- - 42	18	- - 39		
36° — 40', 0							
$E = 123,0$; $\log P = 0,21142$; $P = 1,626$							

2. Dieselbe Neigung an demselben Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	36° — 42'	8	36° — 39'	15	36° — 42'	22	36° — 39'	29	36° — 42'
2	- - 39	9	- - 39	16	- - 42	23	- - 36	30	- - 39
3	- - 39	10	- - 42	17	- - 39	24	- - 42		1100° — 30'
4	- - 45	11	- - 42	18	- - 39	25	- - 42		
5	- - 39	12	- - 42	19	- - 45	26	- - 42		
6	- - 42	13	- - 39	20	- - 45	27	- - 45		
7	- - 45	14	- - 36	21	- - 39	28	- - 39		
36° — 41', 0									
$E = 189,0$; $\log P = 0,37676$; $P = 2,381$									

Diese beiden Winkel, nach unserer Regel combinirt, geben

$$36^{\circ} - 40' - 36''$$

Nimmt man das Octaëder, welches von den Flächen c gebildet wird, als Grundform des Vesuvians, so ist:

Neigung zweier benachbarter Octaëderflächen . . . $130^{\circ} - 2' - 0''$
 Neigung der Endkante gegen die Axe $62^{\circ} - 13' - 41''$
 Neigung der Octaëderfläche gegen die Axe $53^{\circ} - 19' - 24''$
 Volumen des Octaëders 4,8079

Nachtrag.

VIII. b. Vesuvian aus Piemont.

Aus der Königlichen Sammlung in Paris.

1. Neigung zweier Octaëderflächen gegeneinander, c zu c .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	50° — 40'	5	50° — 38'	9	50° — 41'	13	50° — 39'
2	- — 41	6	- — 38	10	- — 40	14	- — 41
3	- — 40	7	- — 41	11	- — 38	709° — 6'	
4	- — 39	8	- — 42	12	- — 38		
50° — 39', 0							
E = 32, 0; P = 3, 06							

2. Neigung von c zu s .

I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$29^{\circ} - 32'$	6	$29^{\circ} - 30'$	11	$29^{\circ} - 30'$
2	- - 32	7	- - 30	12	- - 30
3	- - 30	8	- - 28	$354^{\circ} - 4'$	
4	- - 31	9	- - 30		
5	- - 31	10	- - 30		
$29^{\circ} - 30', 3$					

3. Dieselbe Neigung an einer anderen Kante.

I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	29° — 33'	6	29° — 30'	11	29° — 30'
2	— — 32	7	— — 29	12	— — 30
3	— — 31	8	— — 29		354° — 1'
4	— — 30	9	— — 28		
5	— — 30	10	— — 29		
29° — 30', 0					

Berechnet man aus 1. den Winkel, den die Messungen 2 und 3. geben, so findet man $29^{\circ} - 30', 9$.

IX. Eisenglanz.

Der Krystall, den ich der Messung unterwarf, war von der Varietät, die man gewöhnlich auf Elba findet, und welche Haüy *binotenaire* nennt. Es konnten nur zwei Messungen gemacht werden, weil der Krystall auf einer Seite aufgewachsen gewesen war; diese beiden Messungen stimmen indess so gut überein, daß man sie für richtig nehmen kann, obgleich sie von der Angabe von Mohs in seiner Charakteristik sehr abweichen.

1. Neigung von P gegen n .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	26° — 12'	5	26° — 15'	9	26° — 9'	13	26° — 12'
2	- — 12	6	- — 15	10	- — 9	14	- — 9
3	- — 15	7	- — 12	11	- — 9	366° — 39'	
4	- — 12	8	- — 9	12	- — 9		
26° — 11', 3							
E = 75,26; log P = 0,11468; P = 1,3022							

2. Neigung von n zu n .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	52° — 27'	5	52° — 24'	9	52° — 24'	13	52° — 21'
2	- — 21	6	- — 24	10	- — 21	14	- — 27
3	- — 24	7	- — 27	11	- — 27	733° — 33'	
4	- — 21	8	- — 21	12	- — 24		
52° — 23', 8							
$E = 80,36$; $\log P = 0,08618$; $P = 1,2195$							

Wir haben also, wenn wir die Neigung von n zu n mit B bezeichnen:

$$\frac{1}{2} B = 63^{\circ} - 48', 7 \quad \text{aus 1.}$$

$$B = 127^{\circ} - 36', 2 \quad \text{aus 2.}$$

geben. $127^{\circ} - 36' - 26''$

Neigung zweier benachbarter Rhomboëderflächen . . $84^{\circ} - 52' - 54''$

Neigung der Rhomboëderkante gegen die Axe $50^{\circ} - 50' - 54''$

Volumen des nächststumpferen Rhomboëders 4,64520

[illegible]

4. Neigung von P zu o am Gottharder Krystall.

Diese Messung giebt den Rhomboöderwinkel gleich $85^{\circ} - 59'$; also genau so groß als Mohs ihn angegeben hat.

2. Neigung von n zu n an einem Elbaer Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$51^{\circ} - 57'$	5	$51^{\circ} - 58'$	9	$52^{\circ} - 0'$	13	$52^{\circ} - 0'$
2	- - 59	6	- - 58	10	$51^{\circ} - 58'$	14	- - 0
3	- - 59	7	$52^{\circ} - 0'$	11	- - 59		$727^{\circ} - 48'$
4	$52^{\circ} - 0'$	8	- - 0	12	$52^{\circ} - 0$		
$51^{\circ} - 59', 1$							

3. Die Neigung von n zu n'

fand ich an beiden Elbaer Krystallen, nach einem Mittel aus sechs Beobachtungen, gleich

$$57^{\circ} - 37', 0.$$

Nach einer frühern Beobachtung, die ich damals verwarf, weil sie mit meinen andern frühern Beobachtungen nicht übereinstimmte, ist dieser Winkel

$$57^{\circ} - 34'.$$

4. Neigung von n zu dem nicht unmittelbar darunter liegenden n' .

Das Mittel aus neun Beobachtungen war:

$$81^{\circ} - 7', 0.$$

Zusammenstellung der letzten Beobachtungen mit den durch Rechnung aus der ersten Messung gefundenen Werthen

	Rechnung.	Beobachtung.
n zu n	$128^{\circ} - 0', 7$	$128^{\circ} - 0', 9$
n zu n'	$122^{\circ} - 26'$	$122^{\circ} - 26'$
		und
		$122^{\circ} - 23'$
n zu dem nicht anliegenden n'	$98^{\circ} - 45'$	$98^{\circ} - 53'$

Es ist unmöglich, einen so grossen Fehler der Beobachtung zuzuschreiben.

Der Krystall, der gemessen wurde, war von der *Variété dodécaèdre Haüy*, und aus Sicilien. Ich konnte nur zwei Winkel messen; die gefundenen Werthe derselben müssen also noch durch andere Messungen bestätigt werden.

[illegible]

2

gleich 787-788

$$\begin{cases} 37^0 - 46' - 40'' \\ 32^0 - 38' - 57'' \end{cases}$$

100° — 50' — 20''

..... 0,66214

öniglichen Samm-

$$75^{\circ} - 47',3$$

$$59^{\circ} - 54,5$$

3. Säulenwinkel.

Zehn Repetitionen gaben $75^{\circ} - 55', 0$.

Derselbe Säulenwinkel ist nach den Messungen 1 und 2 gleich $75^{\circ} - 58'$.

XI. Arragonit.

— Unter den sechs Arragonitkrystallen, die mir zu Gebote standen, fand ich nur einen, der zur Messung hinlängliche Spiegelung besaß. Er war aus Böhmen und von der *Variété quadrioctonale* des *Haüy*. Ich maß ihn mit dem Wollaston'schen Goniometer, mit Fernglas und Fadenkreuz, nach der in der ersten Abtheilung unter dem Artikel „Malus's Goniometer“ angegebenen Methode.

0.01 g/ml

$$E = 96,84; P = 1,322$$

2. Neigung von h zu P .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	54° - 15'	7	54° - 14'	13	54° - 14'	19	54° - 14'
2	- - 15	8	- - 15	14	- - 15	20	- - 15
3	- - 13	9	- - 15	15	- - 15	1084° - 32'	
4	- - 12	10	- - 13	16	- - 13		
5	- - 12	11	- - 12	17	- - 13		
6	- - 13	12	- - 12	18	- - 12		
54° - 13', 6							
E = 28, 80; P = 6, 944							

3. Neigung von M gegen h an der Kante m .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	58° — 6'	9	58° — 5'	11	58° — 3'	16	58° — 4'
2	- — 4	7	- — 8	12	- — 6	17	- — 4
3	- — 5	8	- — 4	13	- — 6	18	- — 4
4	- — 4	9	- — 5	14	- — 5	19	- — 5
5	- — 4	10	- — 3	15	- — 5	1103° — 30'	
$58^{\circ} - 4',7$							
$E = 25,71; P = 7,021$							

4. Neigung von M zu h an der Kante n .

Das Mittel aus fünf Beobachtungen gab für diese Neigung

$$58^{\circ} - 11',4.$$

Die Summe der aus 3 und 4 hervorgehenden Werthe giebt

$$116^{\circ} - 16',1$$

als den Säulenwinkel des Arragonits; und dies kommt sehr mit dem Resultat der Messung 1 überein.

5. Neigung von P zu M .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$72^{\circ} - 3'$	7	$72^{\circ} - 2'$	13	$72^{\circ} - 0'$	19	$72^{\circ} - 2'$
2	- - 4	8	$71^{\circ} - 59'$	14	- - 0	20	- - 4
3	- - 1	9	$72^{\circ} - 0'$	15	- - 0		$1440^{\circ} - 30'$
4	$71^{\circ} - 59'$	10	- - 1	16	- - 2		
5	$72^{\circ} - 3'$	11	- - 3	17	- - 2		
6	- - 2	12	- - 1	18	- - 2		

$72^{\circ} - 1', 5$
 $E = 43,00; P = 4,651$

Berechnet man aus den Messungen 2 und 5 den Säulenwinkel, so findet man

$$116^{\circ} - 16', 4$$

welches so gut mit der Messung 1 zusammenstimmt, daß an der Richtigkeit der Messungen kein Zweifel übrig bleibt.

Legt man also beim Arragonit dasjenige Octaëder mit rhombischer Basis zum Grunde, dessen zwei Endkanten von den Flächen P , dessen Kanten an der Basis von den Flächen M grade abgestumpft werden, so sind folgende Winkel die merkwürdigsten dieses Octaëders:

Endkantenwinkel	{ $129^{\circ} - 35' - 40''$ $93^{\circ} - 31' - 0''$
Neigung der Octaëderfläche gegen die Axe	$36^{\circ} - 13' - 50''$
Neigungswinkel der Octaëder-Endkanten gegen die Axe	{ $40^{\circ} - 47' - 5''$ $54^{\circ} - 13' - 40''$
Neigung der Kanten an der Basis	$63^{\circ} - 43' - 40''$
Volumen des Octaëders	1,59653

XII. Zinnstein.

Phillips hat mehrere Messungen bei einem schönen Krystall gemacht. In Ermangelung eigener Beobachtungen führe ich sie hier auf, nach meiner Weise bearbeitet, damit man sehe, wie man sich von der Genauigkeit fremder Arbeiten überzeugen könne. Der erste Krystall, den Phillips maß, war *Haüy's variété bissexdécimale* Fig. VI. Er fand folgende Winkel:

$$P \text{ zu } P'' = 67^{\circ} - 50'$$

$$s \text{ zu } s = 121^{\circ} - 40' \quad (A)$$

$$P \text{ zu } s = 150^{\circ} - 45'$$

$$l \text{ zu } r = 161^{\circ} - 35'$$

$$g \text{ zu } r = 153^{\circ} - 25'$$

$$r' \text{ zu } r' = 143^{\circ} - 10'$$

$$r \text{ zu } r' = 126^{\circ} - 45'.$$

Die *Variété distique* Haüy Fig. VII. gab folgende Winkel:

$$z \text{ zu } z' = 159^{\circ} - 5' \text{ dessen Hälfte } 79^{\circ} - 32', 5 \quad (Q)$$

$$z \text{ zu } z = 118^{\circ} - 10' \text{ dessen Hälfte } 59^{\circ} - 5' \quad (P)$$

$$z \text{ oder } z' \text{ zu } g = 155^{\circ} - 25'.$$

Alle diese Winkel sind ohne Repetition gemessen und mit einem Instrument, das die Winkel nur von 5 zu 5 Minuten gab, daher die Minuten alle Multipel von 5; sie können deshalb schon aus diesem Grunde um 2 bis 3 Minuten falsch seyn.

Mit einem vorzüglich guten Instrument, das halbe Minuten anzeigte, wurde die Neigung von s zu g gemessen

$$s \text{ zu } g = 133^{\circ} - 32', 5.$$

Hiernach ist die doppelte Neigung, I , von s gegen die Axe $= 92^{\circ} - 55'$, und wenn wir die Neigung von P gegen die Axe mit r bezeichnen:

$$r = 56^{\circ} - 6', \log \operatorname{tg} r = 0,17264 \text{ nach der Formel:}$$

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} I.$$

Diesen letzten Winkel, den wir nach Phillips Versicherung als der Wahrheit sehr nahe kommend ansehen können, wollen wir mit Hülfe der übrigen Messungen noch verbessern.

Es ist bekannt, daß das Zinnsteinoctaëder, das von den Flächen s gebildet wird, zu denjenigen gehört, deren Basis ein Quadrat ist. Um indess ohne alle Voraussetzung alles, was wir wissen wollen, aus den Beobachtungen selbst herzuleiten, wollen wir die oben angeführten Neigungen der Säulenflächen mit denen, die aus der Theorie fließen, vergleichen und sehen, ob sie gut mit einander übereinstimmen.

	Beobachtung.	Rechnung.	Differenz.
l zu r	$161^{\circ} - 35'$	$161^{\circ} - 33', 9$	$+ 1', 1$
g zu r	$153^{\circ} - 25'$	$153^{\circ} - 26', 1$	$- 1', 1$
r' zu r	$143^{\circ} - 10'$	$143^{\circ} - 7', 8$	$+ 2', 2$
r zu r'	$126^{\circ} - 45'$	$126^{\circ} - 52', 2$	$- 7', 2$

Die drei ersten Differenzen überschreiten die Fehlergrenze, die schon die Theilung des Instruments von $5'$ zu $5'$ erwarten läßt, nicht. Die letzte Messung weicht zwar sehr ab; aber berechnet man diesen Winkel aus der zweiten Beobachtung, so findet man $126^{\circ} - 50'$ also $5'$ oder ein Theilungselement mehr. Substituirt man diesen letzten Werth, der auch aus den Beobachtungen fließt, so wird die Summe der Differenzen $= 0$; die Beobachtungen bestätigen also vollkommen, daß die Basis des Zinnsteinoctaëders ein Quadrat sei. Nun ist es leicht, den Zusammenhang aller Winkel, die in der *Variété bissexdécimale* vorkommen, in trigonometrischen Formeln anzugeben. Bei der *Variété distique* ist indess noch der

Zusammenhang zwischen den Flächen s , z und z' aus den Beobachtungen selbst herzuleiten.

Die Kanten $\frac{z}{z}$, $\frac{z}{z'}$, und die Axe des Krystalls treffen offenbar, hinlänglich verlängert, in eine Spitze zusammen, deren ebene und solide Winkel wie in einem sphärischen Dreieck zusammenhängen. Die Neigung der Kante $\frac{z}{z}$ gegen die Axe sei q , die der Kante $\frac{z}{z'}$ gegen die Axe p , die der Kanten $\frac{z}{z}$ und $\frac{z}{z'}$ gegeneinander o . Von den soliden Winkeln sind uns die halben Neigungswinkel von z zu z und z zu z' , P und Q , bekannt, der dritte O an der Axe ist $= 45^\circ$. Nach einer von den Gaussischen sphärisch-trigonometrischen Formeln hängen diese Winkel so untereinander zusammen

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p - q) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (P - Q)}{\sin \frac{1}{2} (P + Q)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} o \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p + q) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (P - Q)}{\cos \frac{1}{2} (P + Q)} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} o \end{aligned}$$

$$\text{worin } \cos \frac{1}{2} o = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (P - Q + O) \cos \frac{1}{2} (P - Q - O)}{\sin P \cdot \sin Q}}$$

Setzt man in diese Formeln

$$P = 59^\circ - 5'$$

$$Q = 79^\circ - 32', 5$$

$$O = 45^\circ$$

so findet man

$$\frac{1}{2} (p + q) = + (24^\circ - 19')$$

$$\frac{1}{2} (p - q) = - (1^\circ - 47')$$

also

$$q = 26^\circ - 6' \quad \log \cot q = 0,30990$$

$$p = 22^\circ - 32' \quad \log \cot p = 0,38206$$

Will man wissen, wo die Fläche z die andere Diagonale der Octaëderbasis schneidet, so ist, wenn man den Neigungswinkel der

Kante, in welche sich je zwei Flächen z , eine vorn, die andere hinten gelegen, schneiden, gegen die Axe mit q' bezeichnet

$$\cot q' = \cot p \sqrt{2} - \cot q = 1,3673$$

$$\log \cot q' = 0,13587$$

also

$$\log \frac{\cot q}{\cot q'} = 0,17403 \text{ nahe } \log \frac{3}{2}$$

$$\log \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} q} = 0,48254 \text{ nahe } \log 3$$

$$\log \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} q'} = 0,30851 \text{ nahe } \log 2$$

Man kann also mit Recht annehmen, dafs, wenn man den Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinatenaxen in den Mittelpunkt des Krystalls legt, so dafs die Axe der z mit der Axe des Krystalls, die Axe der x mit der Diagonale der Octaëderbasis, welche die Kante $\frac{z}{z}$ trifft, die Axe der y mit der anderen Diagonale zusammenfällt, und die halbe Axe $= 1$ setzt, die Gleichungen der abgebildeten Flächen folgende seien:

$$\text{Gleichung der Fläche } z \quad 3 \cot r \cdot x + 2 \cot r \cdot y + z = 1$$

$$\text{der Fläche } z' \quad 2 \cot r \cdot x + 3 \cot r \cdot y + z = 1$$

$$\text{der Fläche } s \quad \cot r \cdot x + \cot r \cdot y + z = 1$$

Jetzt haben wir alles was wir brauchen, um den Zusammenhang der Neigungswinkel untereinander zu finden. Man findet nach den gehörigen Reductionen der unbequemen und weitläufigen analytischen Formeln folgende sphärisch-trigonometrische Gleichungen:

$$1. \quad \cos q = \frac{3}{2 \operatorname{tg} P} \text{ oder da } \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{tg} r}{3}$$

$$9 + \operatorname{tg}^2 r = 4 \operatorname{tg}^2 P$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\cos^3 P \sin r}{4 \sin P \cos^3 r}$$

Setzt man in diese Formeln $P = 59^0 - 5'$, so findet man

$$r = 55^0 - 43', 33$$

$$\log \left(\frac{2dP}{dr} \right)^2 = 0,12607 - 1, \quad \left(\frac{2dP}{dr} \right)^2 = 0,13368$$

2. $\cos p = 5 \cot Q$

$$\operatorname{tg} r = \frac{5 \operatorname{tg} p}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{dQ}{dp} \cdot \frac{dp}{dr} = \frac{\sqrt{2} \sin p \cos^2 Q}{\cos^2 r}$$

Hierin $Q = 79^0 - 32', 5$ gesetzt, giebt

$$r = 55^0 - 51', 55$$

$$\log \left(\frac{2dQ}{dr} \right)^2 = 0,11294 - 2, \quad \left(\frac{2dQ}{dr} \right)^2 = 0,01297$$

3. $\cot \frac{1}{2}A = \cos r, \quad \frac{dA}{dr} = 2 \sin r \sin^2 \frac{1}{2}A,$

also $A = 121^0 - 40'$ gesetzt

$$r = 56^0 - 4', 4$$

$$\log \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 = 0,20444, \quad \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 = 1,6012$$

4. Zieht man von dem Neigungswinkel von P zu s 90^0 ab, so bekommt man einen zweiten Werth von $\frac{1}{2}A$, woraus

$$r = 55^0 - 56', 5.$$

Der Differentialquotient beträgt hier offenbar die Hälfte des vorigen, das Quadrat desselben ist also $= 0,4003$ dessen

$$\log = 0,60238.$$

5. Die Hälfte der Neigung von P zu P'' von 90^0 abgezogen giebt

$$r = 56^0 - 5'.$$

Der Differentialquotient ist hier offenbar 2, also das Quadrat desselben 4, dessen $\log = 0,60206.$

Alle diese Werthe von r sind kleiner, als der, den wir aus der Neigung von s zu g berechnet haben, und der $56^\circ - 6'$ betrug. Es sei deshalb r' die Correction, die an diesem Werth von r anzubringen ist; so haben wir, wenn wir die in der ersten Abtheilung auseinandergesetzte Combinationsmethode befolgen wollen, folgende Tafel zu entwerfen:

$$0,13368 \cdot 22', 66 = 0,13368 \cdot r'$$

$$0,01297 \cdot 14', 45 = 0,01297 \cdot r'$$

$$1,60120 \cdot 1', 6 = 1,60120 \cdot r'$$

$$0,40030 \cdot 9', 5 = 0,40030 \cdot r'$$

$$4,00000 \cdot 1', 0 = 4,00000 \cdot r'$$

$$\hline 13', 5814 = 6,1481 \cdot r'$$

$$r' = \frac{13,5814}{6,1481} = 2', 20$$

$$r - r' = 56^\circ - 3', 8$$

$$\log \operatorname{tg} (r - r') = 0,17204.$$

Wir berechnen nun aus diesem verbesserten Werth von r die übrigen Winkel, und stellen sie mit den Beobachtungen zusammen.

	Rechnung.	Beobachtung.	Differenz.	Quadrate der Diff.
P zu P''	$67^\circ - 52', 4$	$67^\circ - 50'$	$+ 2, 4$	5, 76
s zu s	$121^\circ - 39', 0$	$121^\circ - 40'$	$- 1, 0$	1, 00
P zu s	$150^\circ - 49', 3$	$150^\circ - 45'$	$+ 4, 3$	18, 49
z zu z'	$159^\circ - 6', 4$	$159^\circ - 5'$	$+ 1, 4$	1, 96
z zu z	$118^\circ - 17', 5$	$118^\circ - 10'$	$+ 7, 5$	56, 25

$$P = 0,1842. \quad 83, 46$$

Man kann also etwa 60 gegen 1 wetten, daß der Fehler des Werthes r die Grenzen $\pm 4'$ nicht übersteige. Häufig gibt $\log \operatorname{tg} r = 0,17339$; das giebt eine Differenz von etwa $5'$. Die Probabilität,

dafs diese Neigung wirklich von Haüy's Angabe abweiche, wird also durch Phillips Messungen auf keinen hohen Grad gebracht.

Volumen des Zinnsteinoctaëders, die halbe Axe = 1 gesetzt, 2,945.

Nachtrag ⁽¹⁾.

A. Turmalin.

1. Neigung von P zu P an einem schwarzen Turmalin aus Sibirien.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° — 48'	7	46° — 45'	13	46° — 45'	19	46° — 42'
2	- — 45	8	- — 48	14	- — 45	20	- — 51
3	- — 48	9	- — 42	15	- — 45	21	- — 51
4	- — 48	10	- — 45	16	- — 48	22	- — 48
5	- — 51	11	- — 45	17	- — 51	1076° — 0'	
6	- — 45	12	- — 51	18	- — 42		
46° — 47', 0							
P = 1,265							

2. Neigung von o zu o an einem grünen Turmalin vom Gotthard.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	77° — 1'	5	77° — 2'	9	77° — 0'	13	76° — 57'
2	- — 1	6	- — 3	10	- — 5	14	77° — 0'
3	76° — 58'	7	- — 0	11	- — 0	1078° — 0'	
4	- — 59	8	76° — 56'	12	76° — 58		
77° — 0'							

(¹) Die unter der Ueberschrift: Nachtrag, hier folgenden Messungen, so wie die oben unter VIII. b., IX, und X. b. eben so bezeichneten, sind von dem Herrn Verfasser, nachdem ihm der Preis bereits zuerkannt war, nachgesendet worden. Auch die Tafeln des Anhangs I. erscheinen hier vom Verfasser umgearbeitet.

3. Dieselbe Neigung an einer andern Kante.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	77° — 10'	5	77° — 9'	9	77° — 9'	13	77° — 6'
2	- - 7	6	- - 5	10	- - 12	14	- - 10
3	- - 4	7	- - 6	11	- - 7		1079° — 46'
4	- - 9	8	- - 6	12	- - 6		
77° — 7', 5							

Die eine von den Flächen gab hier ein Doppelbild; die Entfernung der beiden Bilder war 8', so daß das zweite Bild 76—59', 5 als den Werth des Winkels gegeben hätte.

Berechnet man aus 77° 0' die Neigung von P zu P , so findet man 133° 8', dessen Complement 46° 52'.

4. Neigung von P zu P an einem rothen Turmalin aus Sibirien.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	46° — 57'	5	47° — 0'	9	46° — 54'	13	47° — 0'
2	- - 57	6	46° — 57	10	- - 57	14	- - 0
3	- - 54	7	- - 57	11	- - 57	15	- - 0
4	- - 57	8	47° — 0'	12	- - 57		704° — 24'
46° — 57', 6							

Wir haben also

beim schwarzen Turmalin 133° — 13'

beim grünen Turmalin . . . 133° — 8'

beim rothen Turmalin . . . 133° — 2'

B. E u c l a s.

Die drei Krystalle, die ich der Messung unterwarf, verdanke ich der Güte des Herrn Monteiro in Paris. Es waren Bruch-

stücke mit den Flächen s , T , f , und der Bruchfläche, die T parallel geht.

1. Neigung von s zur Bruchfläche.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	122°—41'	4	122°—34'	7	122°—37'	10	122°—36'
2	- —29	5	- —33	8	- —30	11	- —29
3	- —38	6	- —37	9	- —37	12	- —39
				1471°—0'			
122°—35'							

von s zu f

139° — 59', 5.

kel gleich

140° — 5'.

gen die Axe gleich

$$48^0 - 52'.$$

C. A p a t i t.

Aus der Königlichen Sammlung in Paris, die unter der Direction
des Grafen Bournon steht.

1. Neigung von x zu x' (Neigung der Dihexaëderflächen x an der Basis).

I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	99° — 28'	5	99° — 25'	9	99° — 25
2	- — 22	6	- — 21	10	- — 21
3	- — 22	7	- — 25	11	- — 27
4	- — 27	8	- — 27		1093° — 30'
			99° — 24', 5		

2. Neigung von x zu M .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	49° — 46'	5	49° — 40'	9	49° — 43	13	49° — 41'
2	- — 45	6	- — 44	10	- — 43	14	- — 42
3	- — 43	7	- — 43	11	- — 41	15	- — 46
4	- — 43	8	- — 46	12	- — 41		745° — 47'

49° — 43', 1

Folgende Neigungen sind an einem andern Krystall gemessen.

3. Neigung von x zu s .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	26° — 50'	5	26° — 49'	9	26° — 47'	13	26° — 50'
2	- — 50	6	- — 48	10	- — 47	14	- — 50
3	- — 48	7	- — 48	11	- — 50		375° — 25'
4	- — 50	8	- — 50	12	- — 48		
26° — 49', 0							

4. Neigung von r zu P .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	23° — 3'	5	23° — 0'	9	23° — 0'	13	23° — 0'
2	- — 2	6	- — 0	10	22° — 59'	14	- — 1
3	- — 1	7	22° — 59'	11	23° — 0'	15	22° — 59'
4	- — 1	8	23° — 0'	12	22° — 59'	16	23° — 2'
23° — 0', 4							
368° — 6'							

5. Neigung von x zu r .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	17° — 20'	5	17° — 18'	9	17° — 17'	13	17° — 18'
2	- — 20	6	- — 20	10	- — 18	14	- — 17
3	- — 18	7	- — 19	11	- — 19	15	- — 18
4	- — 17	8	- — 18	12	- — 24	16	- — 20
17° — 18', 8							
332° — 1'							

6. Neigung von x zu M .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	49° — 43'	5	49° — 41'	9	49° — 39'	13	49° — 41'
2	- — 39	6	- — 42	10	- — 42	14	- — 39
3	- — 38	7	- — 41	11	- — 42	15	- — 40
4	- — 39	8	- — 41	12	- — 38	16	- — 40
49° — 40', 3							
794° — 45'							

7. Neigung von r zu r .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	$22^{\circ} - 28'$	5	$22^{\circ} - 27'$	9	$22^{\circ} - 27'$	13	$22^{\circ} - 28'$
2	- - 29	6	- - 28	10	- - 27	14	- - 29
3	- - 29	7	- - 28	11	- - 27	15	- - 27
4	- - 28	8	- - 26	12	- - 26	16	- - 29
			$22^{\circ} - 27', 7$				$359^{\circ} - 23'$

8. Dieselbe Neigung an einer andern Kante.

Sechs Repetitionen gaben

$$22^{\circ} - 36', 1.$$

Das Mittel aus den Messungen 7 und 8 ist

$$22^{\circ} - 31', 9.$$

Setzt man, der Messung 1 gemäß, die Neigung der Dihexaëderfläche gegen die Axe gleich

$$49^{\circ} - 42', 25,$$

so findet man durch Rechnung:

	Beobachtung.	Rechnung.
Neigung von x zu M	$130^{\circ} - 16', 9$	$130^{\circ} - 17', 75$
desgl.	$130^{\circ} - 19', 7$	
von x zu s	$153^{\circ} - 11', 0$	$153^{\circ} - 9', 2$
von r zu P	$156^{\circ} - 59', 6$	$157^{\circ} - 0', 0$
von x zu r	$162^{\circ} - 41', 2$	$162^{\circ} - 41', 1$
von r zu r	$157^{\circ} - 23', 9$	$157^{\circ} - 28', 6$
desgl.	$157^{\circ} - 32', 3$	

D.—Vitriolbleierz.

Zwei Krystalle aus der Königlichen Sammlung in Paris, die unter der Direction
des Grafen Bournon steht.

1. Neigung der Säulenflächen gegen einander.

[illegible]

2. Neigung der Zuschärfungsfläche gegen die Säulenfläche.

I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	60° — 7'	5	60° — 4'	9	60° — 4'
2	— — 6	6	— — 6	10	— — 3
3	— — 4	7	— — 7	11	— — 4
4	— — 3	8	— — 6	12	— — 6
			60° — 5', 0		721° — 0'

3. Complement zum vorigen Winkel.

Sechs Repetitionen gaben als Mittel $119^{\circ} - 55', 0$.

4. Säulenwinkel an einem anderen größeren Krystall.

[illegible]

des ersten Bannes steht.

Fc Weissbleierz

241-27

- grade abgestumpft wird.

 $71^{\circ} - 28,7$

2. Dieselbe Neigung auf der andern Seite.

 $71^{\circ} - 22', 8$

Dieselbe Fläche war gegen M unter $144^{\circ} - 14'$ geneigt.

3. Neigung von t zu M .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	35° — 51'	5	35° — 47'	9	35° — 47'	13	35° — 48'
2	— — 47	6	— — 50	10	— — 49	14	— — 49
3	— — 47	7	— — 49	11	— — 51	15	— — 47
4	— — 45	8	— — 46	12	— — 49	537° — 2'	
35° — 48', 1							

4. Neigung von M zu M .

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	62° — 46'	6	62° — 43'	11	62° — 46'	16	62° — 43'
2	- — 45	7	- — 41	12	- — 48	17	- — 46
3	- — 41	8	- — 44	13	- — 48	1066° — 37'	
4	- — 43	9	- — 44	14	- — 43		
5	- — 43	10	- — 41	15	- — 42		
62° — 44', 5							

5. Derselbe Winkel an einem andern Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	62° — 45'	6	62° — 47'	11	62° — 44'	16	62° — 43'
2	— — 44	7	— — 46	12	— — 45	17	— — 46
3	— — 43	8	— — 44	13	— — 45	1066° — 46'	
4	— — 43	9	— — 46	14	— — 45		
5	— — 43	10	— — 43	15	— — 44		
62° — 45', 0.							

6. Neigung von t zu M an einem andern Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	35° — 43'	5	35° — 43'	9	35° — 44'
2	— — 41	6	— — 42	10	— — 40
3	— — 41	7	— — 41	357° — 0'	
4	— — 42	8	— — 43		
35° — 42', 0					

7. Derselbe Winkel an einem dritten Krystall.

I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	35° — 44'	5	35° — 46'	9	35° — 45'
2	- — 44	6	- — 42	10	- — 45
3	- — 45	7	- — 40		357° — 20'
4	- — 44	8	- — 45		
35° — 44', 0					

8. Neigung von M zu l .

Sechs Repetitionen gaben

58° — 32'.

9. Neigung von M gegen ein hinteres t .

I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	68° — 14'	5	68° — 15'	9	68° — 13'
2	- — 13	6	- — 14	10	- — 14
3	- — 10	7	- — 16	11	- — 13
4	- — 11	8	- — 10		750° — 23'
68° — 13', 0					

Nimmt man die Messungen 1 und 4 als richtig, so findet man

	Rechnung.	Beobachtung.
Neigung von t zu t	108° — 31'	108° — 24'
		108° — 37'
		108° — 36'
		108° — 32'
		108° — 28'
Neigung von M gegen die Axe	58° — 37', 75	58° — 32'
Neigung von M gegen ein hinteres t	111° — 48', 6	111° — 47'.

Mittel: 31', 4

F. Honigstein.

1. Neigung der Octaëderflächen an einer Endkante.

I.	II.	I.	II.	I.	II.
1	61° — 49'	5	61° — 46'	9	61° — 46'
2	- — 47	6	- — 49	10	- — 44
3	- — 44	7	- — 48	11	- — 47
4	- — 44	8	- — 47	12	- — 48
61° — 46', 5				741° — 19'	

2. Neigung der Octaëderflächen an der Basis.

Vier Repetitionen gaben

$$86^{\circ} — 55'.$$

Die Messung 1 giebt für das Complement zum Neigungswinkel der Octaëderflächen an der Basiskante

$$86^{\circ} — 54'.$$

A n h a n g.

Beiträge zu einer Theorie der Krystallbildung.

I.

Man hat sich auf mannigfache Art bemüht, die äußeren Formen der Krystalle aus ihren chemischen Bestandtheilen herzuleiten; aber man ist noch weit vom Ziele entfernt, und an eine Theorie, welche auf so festen Stützen gegründet wäre, daß man nach ihren Principien die Winkel eines Krystalls berechnen könnte, hat man noch gar nicht denken können.

Als ich mich mit diesem Gegenstande beschäftigte, sah ich ein, daß theils wegen der unsichern Messungen, theils wegen der

willkürlichen Bestimmung der Grundgestalten, die Hypothesen hier einen großen Spielraum haben, und daß, wenn man zur Wahrheit gelangen will, man sich die Aufgabe machen müsse, nicht nur ungefähr die Form, sondern auch genau die Winkel eines Krystalls aus einem gewissen Princip abzuleiten. Dies ist mir, glaub' ich, zum Theil gelungen; ich habe einen gewissen Zusammenhang zwischen der äußeren Form, dem chemischen Aequivalent und dem specifischen Gewicht der Krystalle gefunden.

Es ist gewiß sehr glaublich, daß die Bildung der Krystalle eben so gewissen mechanischen Gesetzen unterworfen ist, als viele andere Naturerscheinungen. Ich dachte mir eine gewisse Kraft m , welche mit irgend einer Potenz vom Gewicht (x) und vom Volumen (y) des Krystalls multiplicirt, die bildende Kraft des Krystalls ausdrückte. Besteht nun ein Krystall aus zwei Bestandtheilen, so läßt sich wohl annehmen, daß beide Bestandtheile dieselbe Krystallform angenommen haben, daß also die beiden Bildungskräfte einander gleich sind.

Es sei $m x^p y^q$ die Bildungskraft des einen, $m' x'^p y'^q$ die Bildungskraft des andern Bestandtheils, so haben wir die Gleichung

$$m x^p y^q = m' x'^p y'^q \dots \dots \dots (1).$$

Da nun die beiden Bestandtheile offenbar denselben äußeren Umfang haben, so ist, da $y = y'$

$$m x^p = m' x'^p$$

oder

$$\frac{m}{m'} = \frac{x'^p}{x^p}$$

Wer kann diese Gleichung ansehen, ohne sich dabei zu erinnern, daß die Gewichte der Bestandtheile eines Krystalls sich

verhalten, wie ihre Atomengewichte. Wir wollen also $p = -1$ setzen, wodurch die Gleichung folgende Gestalt gewinnt.

$$\frac{m}{m'} = \frac{x}{x'} \dots \dots \dots (2)$$

aus welcher man sieht, daß m das Atomengewicht des einen, m' das Atomengewicht des andern Bestandtheils bedeutet.

Ich habe nun für jedes System die Volumina der Krystalle welche es begreift, berechnet, indem ich in allen die Axe derselben gleich 1 setzte. Ich habe gefunden, daß alsdann für jedes System

$$\frac{mS}{y} = \frac{m'S'}{y'} \dots \dots \dots (3)$$

wo S das specifische Gewicht des Krystalls bedeutet.

Die Zulässigkeit dieser Gleichung beweisen die nachstehenden nach den bekannten vier Hauptsystemen entworfenen Tafeln.

In jeder Tafel habe ich bei der ersten Substanz Atomengewicht, Volumen und specifisches Gewicht aus der Erfahrung genommen. Bei allen übrigen Substanzen derselben Tafel habe ich Atomengewicht und Volumen auch aus der Erfahrung genommen, das specifische Gewicht aber berechnet, aus der Gleichung (3), nach welcher

$$S' = \frac{mS}{y} \cdot \frac{y'}{m'}$$

$\frac{mS}{y}$ ist also für jede Tafel eine constante Gröfse, welche aus der Erfahrung genommen ist, das heißt, das Product des Atomengewichts und des specifischen Gewichts der ersten Substanz in jeder Tafel, durch das Volumen ihrer Krystallform dividirt.

Daß die berechneten Werthe des specifischen Gewichts der angesetzten Substanzen mit der Erfahrung so gut übereinstimmt, ist der beste Beweis, daß die Gleichung (3) richtig ist.

Die Atomengewichte habe ich, wo ich die Quelle nicht besonders angezeigt habe, aus Berzelius neuesten Tafeln entlehnt; ich habe die dort gegebenen Zahlen, wo es nöthig war, mit den natürlichen Zahlen 1. 2. 3 etc. dividirt oder multiplicirt, oft beides zugleich, wie es offenbar erlaubt ist, da die Atomengewichte nur Verhältniszahlen sind, welche vielleicht verdoppelt und verdreifacht, vielleicht auch halbt und gedrittelt werden müssen. Wer indess die Atomengewichte unverändert lassen will, kann das grösstentheils sehr leicht durch eine zweckmässige Wahl der Grundformen erreichen, deren Volumina man auch verdoppeln oder vervierfachen kann, wenn man statt der einmal gewählten Grundform eine von denjenigen Formen wählt, welche durch Abstumpfung der Kanten oder Ecken der gewählten Grundform entstehen.

I. Reguläre Octaëder.

$$\log \frac{mS}{r} = 4.02193, \log mS = 4.14687$$

	Atomengewicht.	Volumen.	Spec. Gewicht n. Rechnung.	Spec. Gewicht nach Erfahrung.
Magneteisenstein	2835, 29	1, 333		4, 946
Glaserz	2060, 21 (2)	2, 00 (Volumen des Rhomboidal- dodecaëders)	6, 808 . . .	6, 90 Häüy. 6, 82 Hoffmann.
Schwefelkies	2966, 1 (2)	1, 333	4, 728	4, 749
Blende	3446, 0 (2)	2, 00	4, 069	4, 07
Alaun	11870, 7	2, 00	1, 772	1, 75
Salmiak	8915, 5 (16)	1, 333	1, 56	1, 5 1, 6
Borazit	5786, 02 (3)	1, 333	2, 918	2, 911
Leuzit	5645, 37 ($\frac{1}{3}$)	1, 333	2, 484	2, 468
Kupfer	1597, 26 (2)	1, 333	8, 78	8, 78
Silber	1344, 0 ($\frac{1}{2}$)	1, 333	10, 44	10, 47

	Atomengewicht.	Volumen.	Spec. Gewicht n. Rechnung.	Spec. Gewicht nach Erfahrung.
Eisen	2713,7 (4)	2,00	7,75	7,78
Rothkupfererz	2396,5 (4)	2,00	5,85	5,75
				5,6 — 6,0 Mohs.
				5,82 Hoffmann.
Granat	3353,8 ($\frac{2}{3}$)	1,333	4,18	4,188
$\ddot{\text{Si}} \ddot{\text{F}}^2 + 2 \ddot{\text{Al}} \ddot{\text{Si}}$				

II. Rhombenocäeder.

$$\log \frac{mS}{\gamma} = 3,96217.$$

	Atomengewicht m	Volumen γ	Spec. Gewicht n. Rechnung S	Spec. Gewicht nach Erfahrung.
Schwerspath	2916,18	1,4259 ($d:d$)		4,481
Topas	7971,78	3,1017 ($M:M$)	3,585	3,55
Pistacit	10198,0	3,915 ($n:n$)	3,519	3,45
$\ddot{\text{Si}}^2 \ddot{\text{Ca}}^3 + 4 \ddot{\text{Al}} \ddot{\text{Si}} + \frac{1}{2} \ddot{\text{Si}}^2 \ddot{\text{F}}^3$				
Arragonit	1262,7	0,39913 ($M:M$)	2,8972	2,9267 Biot. 2,897 Stromeyer.
Cölestin	2296,9	0,99321 ($d:d$)	3,963	3,958
Weißbleierz	3339,3	2,353 ($\gamma:\gamma$)	6,45	6,4 . . . 6,5 Mohs. 6,558 Häuy.
Vitriolbleierz	3791,3	2,516 ($P:P$)	6,082	6,0717
Sphen	22033,2	8,462 ($l:l$) Rose.	3,520	3,51
$\ddot{\text{Ca}}^3 \ddot{\text{Si}}^{12} + \ddot{\text{Ca}}^3 \ddot{\text{Ti}}^9$ (Rose).				
Euclas	8072,9 (2)	2,735 ($s:s$)	3,105	3,063

	Atomengewicht <i>m</i>	Volumen <i>y</i>	Spec. Gewicht n. Rechnung <i>S</i>	Spec. Gewicht nach Erfahrung.
Chrysolith	14800, 13 $\text{Si}^2 \text{F}^3 + 4 \text{Si}^2 \text{Mg}^3$	5, 466 (<i>n : n</i>)	3, 386	3, 428 Häüy. 3, 358 Mohs.
Chrysoberyll	3720, 5 $\text{Si} \text{Al}^4 + \frac{1}{6} \text{Si}^2 \text{Ca}^3$	1, 5188 Axe senkr. auf <i>T</i>	3, 742	3, 796
Kupferlasur	8600, 74	3, 583 (Rose.) (<i>M : M</i>)	3, 818	3, 7 — 3, 9 Mohs.
Gyps	2164, 12	0, 5556 Axe senkr. auf <i>M</i>	2, 353	2, 322
Feldspath	7235, 83	2, 037 (<i>P : T</i>)	2, 580	2, 578
Kupferkies	2274, 46 $\text{Cu S}^2 + \text{Fe S}^2$	1, 077 (Phillips.)	4, 34	4, 315
Bittersalz	2643, 4	0, 5062 (Mohs.) (<i>M : M</i>)	1, 756	1, 7 1, 8 Mohs.
Zinkvitriol	3133, 1	0, 6758	1, 977	2, 0 Mohs. 1, 90 Muschenbr.
Natron	7162, 2 (2)	1, 1718	1, 499	1, 4 1, 6 Mohs.
Schwefel	201, 16	0, 04457 ? (<i>m : m</i>)	2, 03	2, 03
Flusspath	3948, 4 (4)	1, 333	3, 095	3, 09
Steinsalz	5868, 5 (4)	1, 333	2, 082	2, 08
Gold	629, 8 ($\frac{1}{4}$) (Javal.)	1, 333	19, 40	19, 4 Dumas.
Nickel	1479, 0 (2)	1, 333	8, 264	8, 4 —
Kobalt	1476, 0 (2)	1, 333	8, 28	8, 5 —
Titan	2334, 6 (3)	1, 333	5, 235	5, 3 Wollaston.

III. Quadratoctaëder.

$$\log \frac{mS}{y} = 3,64387.$$

	Atomengewicht.	Volumen.	Spec. Gewicht n. Rechnung.	Spec. Gewicht nach Erfahrung.
Zinnstein	1870, 58	2, 945		6, 934
Scapolith (Mejonit) . .	10761, 46	6, 884	2, 817	2, 8
$\text{Ca}^3 \text{Si}^2 + 6 \text{Al Si}$				
Tungstein	2484, 9 ($\frac{2}{3}$)	3, 426	6, 07	6, 05
Spinell	1543, 0 ($\frac{1}{2}$)	1, 333	3, 806	3, 78 . . . 3, 81

IV. Rhomboëder.

$$\log \frac{mS}{y} = 3,03528.$$

	Atomengewicht.	Volumen.	Spec. Gewicht n. Rechnung.	Spec. Gewicht nach Erfahrung.
Kalkspath	1262, 7	3, 1643		2, 718
Quarz	596, 4	1, 4318	2, 60	2, 65
Apatit	1470, 27 ($\frac{3}{8}$)	4, 280	3, 16	3, 2
Corund	321, 16 ($\frac{1}{2}$)	1, 245	4, 20	4, 0 — 4, 28
Rother Turmalin	3972, 6 ($\frac{1}{6}$)	11, 482	3, 142	3, 07 — 3, 15
$\text{Na}^3 \text{Si}^2 + 18 \text{Al Si}$				

$$\log \frac{mS}{y} = 3,30845.$$

	Atomengewicht.	Volumen.	Spec. Gewicht n. Rechnung.	Spec. Gewicht nach Erfahrung.
Beryll	7018, 56	9, 280		2, 69
Eisenglanz	489, 2 ($\frac{1}{2}$)	1, 236	5, 141	5, 0 — 5, 2

Anmerkungen.

1. Die den Atomengewichten in Klammern beigesetzten Zahlen sind diejenigen, mit denen die von Berzelius angegebenen Atomengewichte multiplicirt worden sind, um die Uebereinstimmung der Rechnung mit der Erfahrung möglich zu machen. In der zweiten Tabelle, die die Rhombenoctäeder enthält, bedeuten die unter jedem Volumen eingeklammerten Buchstaben die Flächen, nach Haüy's Bezeichnung, deren Durchschnittslinie mit der Axe parallel ist. In der vierten Tabelle habe ich den Eisenglanz und den Beryll von den übrigen Substanzen abgesondert, weil diese beiden Fossilien nur durch eine nicht ganz einfache Zahl sich mit den übrigen zusammenbringen lassen, nämlich durch die Zahl 5, mit welcher man ihre Atomengewichte dividiren müßte.
2. Das Atomengewicht des Kupfers ist nach Berzelius früherer Angabe 806, nach seiner spätern 791,3. Ich habe das Mittel aus diesen beiden Zahlen gewählt. Berzelius frühere Angaben über das Atomengewicht des Silbers geben das specifische Gewicht desselben richtiger, als die spätern; ich habe sie deshalb vorgezogen. Das Atomengewicht des Silbers ist nach seiner früheren Angabe 1344, nach seiner neuesten 2703,21 (das doppelte von 1351,6).
3. Eine große Anzahl von Analysen giebt den Werth des Atomengewichts der Kieselerde etwas niedriger als in der obigen Tafel nach Berzelius angenommen ist. Fünf Stromeyersche Analysen, die des Apophyllits, des Tafelspaths, des Picroliths, des Allophans und des Kieselspaths (s. dessen chemische Untersuchungen) geben im Mittel $m = 580,14$, und hieraus findet man das specifische Gewicht des Quarzes gleich 2,655, welches mit der Haüy'schen Angabe 2,653, die gewiß sehr richtig ist, außerordentlich gut übereinstimmt. Herr Dr. Rose fand das specifische Gewicht des Quarzes nach einer sehr sorgfältigen Wägung gleich 2,6526.

Wenn man im Besitz mehrerer guter Analysen desselben Fossils ist, so ist es nicht schwer, durch eine mathematische, auf unsere obigen Principien gegründete Discussion derselben, den aus

denselben folgenden Bestimmungen der Atomgewichte eine große Schärfe zu geben. Ich wähle Stromeyer's Analysen des Apophyllits, um zu zeigen, wie man in solchen Fällen verfahren kann.

Stromeyer fand (siehe dessen Untersuchungen über die Mischung der Mineralkörper, erster Band, pag. 286) in 100 Theilen des Fassaer Apophyllits:

Nummer der Untersuchung.	Kieselerde.	Alaunerde und Eisenoxydhydrat.	Kalk.	Kali.	Wasser.
I.					16,0666
II.					16,0210
III.	51,8083	0,6084	25,0529	5,1624	—
IV.	51,6951	0,3767	25,0499	5,0738	—
V.	51,3314	0,4173	25,1738	5,1808	—
VI.	51,6207	0,5059	25,0116	5,0035	—

Das Mittel aus diesen Untersuchungen giebt folgende Zusammensetzung des Apophyllits:

Kieselerde	51,6139
Alaunerde und Eisenoxydhydrat	0,4771
Kalk	25,0721
Kali	5,1051
Wasser	16,0438
Verlust	1,6880
	100,0000.

Um das Gewicht P dieser mittleren Werthe zu finden, erhebt man nach der in der ersten Abtheilung entwickelten Regel die Differenzen derselben und der beobachteten Werthe ins Quadrat, addirt diese Quadrate zusammen, verdoppelt die Summe, und dividirt sie in das Quadrat der Anzahl der Untersuchungen. Man erhält so den Werth von P für jeden einzelnen Bestandtheil, nämlich für

R

Kieselerde	$\frac{8}{0,12055}$
Eisenoxydhydrat und Alaunerde	$\frac{8}{0,03160}$
Kalk	$\frac{8}{0,01497}$
Kali	$\frac{8}{0,02039}$
Wasser	$\frac{8}{0,00416}$

Diese Werthe geben uns einen richtigen Mafsstab für die Genauigkeit der einzelnen Angaben, den wir benutzen können, den Verlust der Analyse mit in Rechnung zu bringen. Es ist gewifs sehr natürlich anzunehmen: dafs diejenigen Bestandtheile, deren Bestimmung am schwankendsten, oder deren P am geringsten ist, am meisten zum Verlust beigetragen haben; man mufs also den Verlust so vertheilen, dafs diejenigen Bestandtheile, deren P am kleinsten ist, am meisten zugezählt bekommen. Man kehrt zu dem Ende die obigen Brüche, welche die Werthe von P geben, um, und findet, dafs sich diese umgekehrten Werthe von P ungefähr so verhalten, wie

$$120 : 30 : 15 : 20 : 4.$$

Nach diesen Verhältniszahlen soll der Verlust 1,6880 vertheilt werden. Bezeichnet man diese Theile mit x, y, z, w, θ , so ist

$$x + y + z + w + \theta = 1,6880$$

$$\begin{aligned} x &= 4y & w &= \frac{2}{3}y \\ z &= \frac{1}{2}y & \theta &= \frac{2}{15}y \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} x &= 1,0718 \\ y &= 0,2679 \\ z &= 0,1340 \\ w &= 0,1786 \\ \theta &= 0,0357 \end{aligned}$$

Endlich besteht also der Fassaer Apophyllit in 100 Theilen aus:

Kieselerde.....	52, 6857
Alaunerde.....	0, 7450
Kalk.....	25, 2061
Kali	5, 2837
Wasser	16, 0795
	100, 0000.

Wir wollen nun noch dieses letzte Resultat mit der Analyse des grönländischen Apophyllits vergleichen, die Stromeyer nur einmal vorgenommen hat. Er fand:

Kieselerde.....	51, 8564
Kalk.....	25, 2235
Kali.....	5, 3067
Wasser	16, 9054
Verlust	0, 7080
	100, 0000.

Vertheilt man den Verlust 0,7080 nach denselben Verhältnisszahlen so ist:

$$\begin{aligned}
 x &= 0, 5343 \\
 z &= 0, 0669 \\
 w &= 0, 0889 \\
 \theta &= 0, 0179 \\
 &\hline
 &0, 7080.
 \end{aligned}$$

Also in 100 Theilen des grönländischen Apophyllits:

Kieselerde	52, 3907
Kalk	25, 2904
Kali.....	5, 3956
Wasser	16, 9233
	100, 0000 (¹).

(¹) Diese Analyse stimmt auch sehr gut mit einer Analyse überein, die Berzelius als sehr genau rühmt, und welche giebt:

Kieselerde	52, 900
Kalk	25, 207
Kali	5, 266
Wasser.	16, 000
	99, 373.

Der Fassaer Apophyllit enthält etwas Thonerde; nimmt man an, ihm sei ein Thonsilicat unwesentlich beigemengt, so sind noch etwa 0,506 vom Kieselerdegehalt abzuziehen, und alsdann stimmen die beiden Analysen, die des Fassaer und des grönländischen Apophyllits bis auf den Wassergehalt außerordentlich überein, wie man aus der folgenden Tabelle ersieht, wo der Kieselerdegehalt als Einheit genommen ist:

Apophyllit			
aus Fassa.		aus Grönland.	
Kieselerde.....	1,000	Kieselerde.....	1,000
Kalk.....	0,483	Kalk.....	0,482
Kali.....	0,101	Kali.....	0,102
Wasser.....	0,327	Wasser.....	0,323

Das Mittel der beiden Kaligehalte ist 0,1015; und dies giebt, mit dem Kieselerdegehalt verglichen, als Atomengewicht der Kieselerde, 581,0, welches der Angabe im Anfange dieser Anmerkung sehr nahe kommt.

II.

Es wird aus obigen Tabellen höchst wahrscheinlich, daß eine gewisse Kraft m bei der Krystallisation thätig ist; was das aber für eine Kraft sei, wird aus diesen Erfahrungen nicht klar. Um hierüber mehr Aufschluß zu erhalten, versuchte ich, ob sich nicht irgend eine Eigenschaft der Substanzen, die sich in Volumenänderung äußert, durch die Function $mx^p y^q$ (1) oder da $p = -1$ und $x = yS$, durch die Function $\frac{my^{q-1}}{S}$ darstellen liefse, und ich fand, daß sich die Würfel der lineären Ausdehnung der Metalle durch die Wärme verhalten, wie $\frac{m}{S}$. Ich habe dieses Gesetz in folgender Tafel dargestellt, und dazu die Untersuchungen von Laplace und Lavoisier (s. *Biot, Traité de physique*) über die Ausdehnung der Metalle in der Wärme benutzt.

Die Ausdehnung des ersten Metalls der Tabelle, des Zinns, ist aus der Erfahrung genommen; die übrigen Ausdehnungen sind alle aus der des Zinns berechnet, nach folgender Gleichung:

$$\frac{k^3}{k'^3} = \frac{\frac{m}{S}}{\frac{m'}{S'}} = \frac{mS'}{m'S}$$

wo k die lineäre Ausdehnung des Metalles von 0° bis 100° Cent. bedeutet; die accentlosen Buchstaben gehören dem Zinn, die accentuirten hingegen demjenigen Metall, dessen Ausdehnung durch die Wärme man berechnen will.

Blei	($\frac{1}{2}$)	1.7200	1.7200	0.000000	0.000000	0.000000
Eisen	($\frac{1}{2}$)	0.930	7.7880	0.000000	0.000000	0.000000
Silber	($\frac{1}{2}$)	1.701	10.17	0.000000	0.000000	0.000000
Gold	($\frac{1}{2}$)	0.372	19.25	0.000000	0.000000	0.000000
Platin	($\frac{1}{2}$)	1.407	19.2	0.000000	0.000000	0.000000
Wismuth	(1)	1.773	9.838	0.000000	0.000000	0.000000

So weit bin ich mit meiner Arbeit gekommen. — Wenn ich irre, so wird man wenigstens nicht verkennen, wieviel Mühe ich mir gegeben habe, die Wahrheit zu entdecken.

Tabelle

über die Ausdehnung der Metalle durch die Wärme. Die Zahlen in der dritten und vierten Spalte geben die Decimaltheile an, um welche ein Stab, dessen Länge = 1 ist, an Länge zunimmt, wenn er von 0° bis 100° Cent. erhitzt wird

$$\log \frac{k^3 S}{m} = 9,2013787 - 20.$$

	m	S	k nach Rechnung.	k nach Erfahrung.
Zinn	3308,83 ($\frac{9}{4}$) 3,5196745	7,2315 0,8592273	 0,0017146 7,2341752 — 10	0,00193765 0,001712 bis 0,001722
Kupfer	2795,2 ($\frac{7}{2}$) 3,4446414	8,78 0,9434945	0,0017146 7,2341752 — 10	0,001712 bis 0,001722
Blei	17260 ($\frac{20}{3}$) 4,2370408	11,32 1,0541851	0,0028934 7,4614114 — 10	0,002848
Eisen	920 ($\frac{4}{3}$) 2,9637878	7,7880 (geschmiedetes) 0,8914259	0,00123388 7,0912469 — 10	0,00122045 bis 0,00123504
Silber	4704 ($\frac{7}{2}$) 3,6724673	10,47 1,0199467	0,0019259 7,2846331 — 10	0,00190974
Gold	3729 ($\frac{3}{2}$) 3,5715924	19,25 1,2844307	0,001455 7,1628468 — 10	0,00146606
Platin	607,61 ($\frac{1}{2}$) 2,7836286	19,5 1,2932545	0,0007893 6,8972509 — 10	0,000795 Dulong.
Wismuth	1773,8 (1) 3,2489536	9,822 0,9921999	0,0014213 7,1527108 — 10	0,00139 s. <i>Davy elements of chem. philosophy</i> p. 71.

So weit bin ich mit meiner Arbeit gekommen. — Wenn ich irre, so wird man wenigstens nicht verkennen, wieviel Mühe ich mir gegeben habe, die Wahrheit zu entdecken.

T a f e l

welche anzeigt, wie groß die Probabilität sei, daß der Fehler des Resultats irgend welcher Beobachtungen nicht die Grenzen ∓ 1 oder $\mp 0,5$ übersteigen werde. Das Argument der Tafel ist P oder das Gewicht des Resultats; man geht mit diesem Argument in die Spalte I. ein, wenn man die correspondirende Probabilität wissen will, daß der Fehler des Resultats die Grenzen ∓ 1 nicht übersteigen werde; man geht in die Spalte II. ein, wenn man die correspondirende Probabilität wissen will, daß der Fehler des Resultats die Grenzen $\mp 0,5$ nicht übersteigen werde; die Spalte III. enthält die gesuchte Probabilität, in Decimalbrüchen ausgedrückt, die Gewissheit $= 1$ gesetzt; die Spalte IV. drückt diese Probabilität auf eine andere Art aus, nämlich wieviel man gegen 1 wetten kann.

I.	II.	III.	IV.	I.	II.	III.	IV.
0,0	0	0,00000	0	4,5	18	0,99730	370
0,5	2	0,68430	2	5,0	20	0,99843	635
1,0	4	0,84270	6	5,5	22	0,99909	1099
1,5	6	0,91664	14	6,0	24	0,99947	1885
2,0	8	0,95447	20	7,0	28	0,99982	5554
2,5	10	0,97462	38	8,0	32	0,99994	16665
3,0	12	0,98568	68	9,0	36	0,99998	50000
3,5	14	0,99184	121	10,0	40	0,99999	100000
4,0	16	0,99532	212				

T a b e l l e

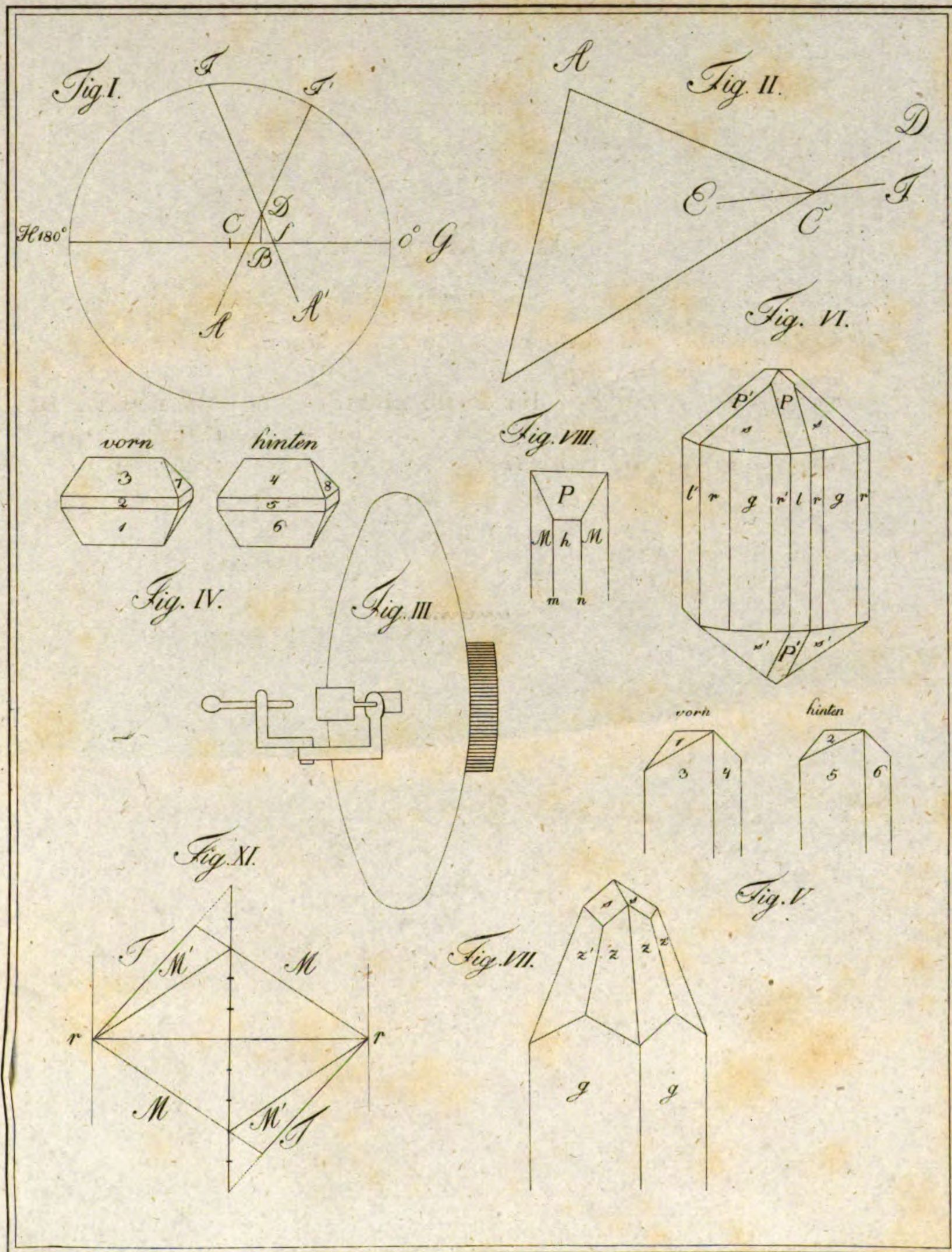
Welche Ausdehnung die Probabilität hat, dass der Fehler des Resultats irgend welcher Beobachtungen nicht die Grenzen ± 1 oder $\pm 0,5$ übersteigen werde. Das Argument der Tabelle ist λ oder das Gewicht des Resultats; man geht mit diesem Argument in die Spalte I. ein, wenn man die entsprechenden Probabilitäten wissen will, dass der Fehler des Resultats die Grenzen ± 1 nicht übersteigen werde; man geht in die Spalte II. ein, wenn man die entsprechenden Probabilitäten wissen will, dass der Fehler des Resultats die Grenzen $\pm 0,5$ nicht übersteigen werde. Die Spalte III. enthält die gesuchte Probabilität, in bestimmten Ausdehnungen ausgedrückt, die Gewichte $= 1$ gesetzt; die Spalte IV. enthält die Probabilität, dass eine andere Beobachtung, die mit der ersten

Berichtigungen.

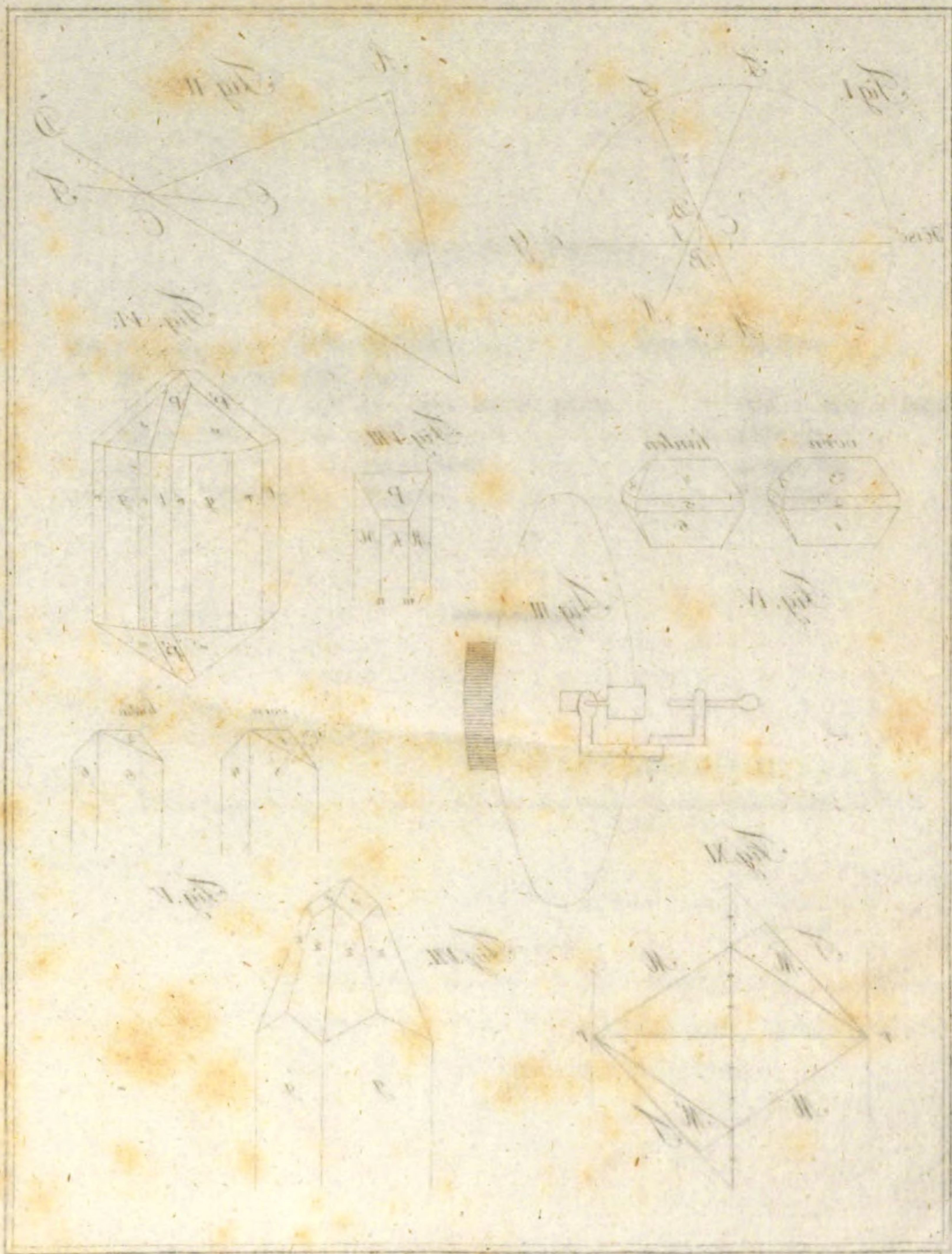
Seite 65. Zeile 17. . . statt machen lese man messen.

- 76. - 2. v. u. fällt weg.
- 89. - 2. . . statt den die dritte giebt, - - den s mit t macht.
- 89. - 8. . . - $133^{\circ} 28'$ - $138^{\circ} 28'$.
- 92. - 4. . . - punctirte - getheilte.
- 102. - 8. v. u. - Fig. 10. - Fig. VIII.

370	0,99730	18	4,5	0	0,00000	0	0,0
633	0,99843	20	5,0	2	0,00130	2	0,2
1099	0,99909	22	5,5	6	0,00270	4	0,4
1885	0,99947	24	6,0	12	0,00410	8	0,8
2521	0,99982	26	6,5	20	0,00547	16	1,6
3221	0,99994	28	7,0	32	0,00682	24	2,4
4062	0,99998	30	7,5	48	0,00818	32	3,2
5000	0,99999	32	8,0	68	0,00947	40	4,0
6000	0,99999	34	8,5	92	0,01067	48	4,8
		36	9,0	120	0,01178	56	5,6
		38	9,5	152	0,01281	64	6,4
		40	10,0	188	0,01376	72	7,2



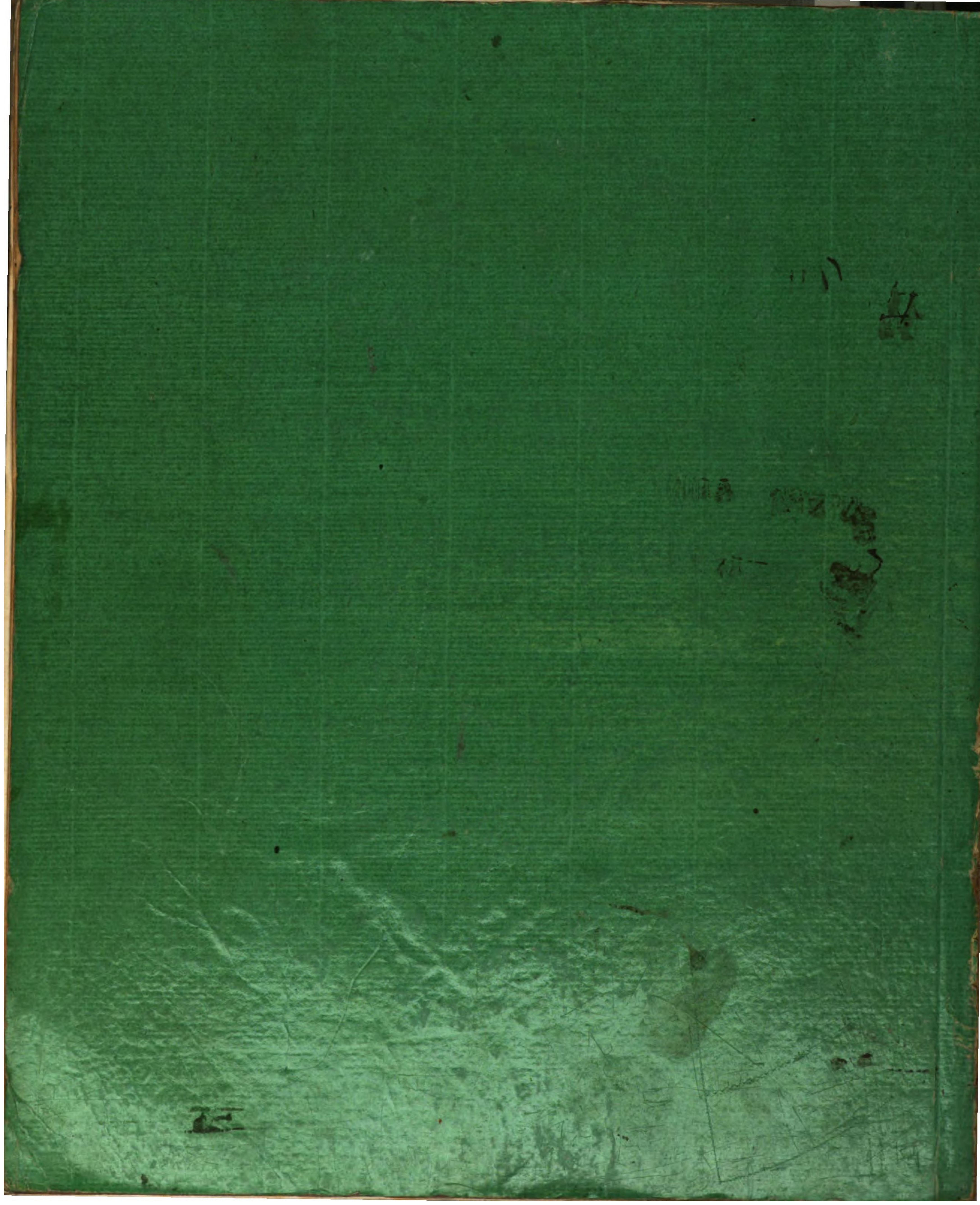
Zu Herrn Kuyffers Preisschrift über Messung v. Kristallwinkeln.



Die neuen Erfindungen, die sich auf die Kunst der Geometrie beziehen



12.



Kupffer, Adolph Theodor,

Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen

Berlin 1825

4 Lith. 90 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10226149-8